МЕХАНИКА. ПРОБЛЕМЫ И ИХ РЕШЕНИЕ

Шипов Г.И.

Введение

Известный американский теоретик Ли Смолин в своей замечательной книге «Неприятности с физикой: взлет теории струн, упадок науки и что за этим следует» [1] определяет пять основных проблем, которые должна решить современная теоретическая физика:

1. *Объединить общую теорию относительности и квантовую теорию в одну теорию, которая может претендовать на роль полной теории природы.*
2. *Решить проблему обоснования квантовой механики либо путем придания смысла теории в ее существующем виде, либо путем изобретения новой теории, которая имеет смысл.*
3. *Определить, могут или нет известные нам взаимодействия и частицы быть объединены в теорию, которая объясняет их все как проявление единственной, фундаментальной сущности.*
4. *Объяснить, как в природе выбираются величины свободных констант в стандартной модели физики частиц.*
5. *Объяснить темную материю и темную энергию. Или, если они не существуют, определить, как и почему гравитация модифицируется на больших масштабах. Более обстоятельно объяснить, почему константы стандартной космологической модели, включая темную энергию, имеют те величины, которые имеют.*

Согласно мировому бестселлеру Брайан Грина «Элегантная Вселенная» [2], ни современная тория струн, пережившая две (оранжевые?) революции, ни Стандартная модель не только не решает эти проблемы, но и принципиально не в состоянии их решить. Причину этого Л. Смолин видит в недостатке «пророков» и переизбытке «ремесленников» в современной теоретической физике [1]. Основной тезис, которым руководствуются «ремесленники» в работе – «shut up and calculate» (заткнись и вычисляй), в то время, как для «пророка» А. Эйнштейна работать - значит думать.

- Мы все что-то прозевали, что-то очень важное, – пишет на последней странице своей фундаментальной книги «Путь к реальности» известный ученый Роджер Пенроуз [3]. Я согласен с Р. Пенроузом и настоящая работа дает краткое представление о том, «что мы все прозевали». Последствия этого фундаментального «зевка», как мне представляется, привели к застою в фундаментальной физике и к низкой эффективности научных исследований.

1. Классическая механика

Казалось бы, что мы все знаем о классической механике, которую начинаем изучать еще в школе. Однако эта наука не является окончательной, как любая другая фундаментальная физическая теория. Вот что пишет Г. Герц по поводу основ механики:

«По моему мнению, прежде всего, надо указать на то, что как раз введение в механику очень трудно излагать вдумчивым слушателям, не ощущая необходимости то тут,

то там приносить этим слушателям, конечно не без некоторого смущения, извинения, и не испытывая желания побыстрей перейти от введения к примерам, которые говорят сами за себя» [4].

1.1 Механика Ньютона

Действительно, основные понятия механики Ньютона, понимаемой нами как механика материальной точки, уравнения которой инвариантны относительно инерциальных систем отсчета, следующие:

1. Материальная точка.
2. Инерциальная система отсчета, движущаяся прямолинейно и равномерно, без вращения. В инерциальной системе отсчета *не наблюдается* действие сил инерции.
3. Однородное и изотропное пространство (событий) механики представляет собой 3D пространство Евклида с евклидовой метрикой $(dl)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.
4. Контактные взаимодействия материальных точек.
5. Три закона Ньютона, инвариантные относительно преобразований Галилея-Ньютона.

Материальная точка – это идеализация твердого тела (без вращения), размеры (следовательно, и объем) которого устремлен к нулю. Плотность такого объекта стремиться в пределе к бесконечности, что недопустимо для реальных тел.

Инерциальная система отсчета, по мнению А. Эйнштейна, это нереальная вещь, поскольку все тела имеют, как минимум, собственное гравитационное поле. Поэтому они взаимодействуют и движутся относительно друг друга ускоренно, хотя во многих случаях этим ускорением можно пренебречь. Все реальные системы движутся ускоренно, поэтому «упущенные в механике Ньютона» силы инерции, действующие в ускоренных системах отсчета, и их роль в основных физических теориях до сих пор остается загадкой.

Трехмерное плоское (Евклидово) пространство напрямую связано с понятием инерциальной системы отсчета и, по большому счету, может описывать только отсутствие существование каких- либо тел и взаимодействий, т.е. пустоту.

Контактные взаимодействия при более глубоком рассмотрении сводятся к взаимодействию полей и выходят за рамки механики Ньютона.

Три закона Ньютона приближенно выполняются в несуществующих в природе нерелятивистских инерциальных системах отсчета и нарушаются в реальных ускоренных системах отсчета. Например, третьему закону механики Ньютона не подчиняются силы инерции [5], действующие в ускоренных системах.

Вывод №1: *Главная причина застоя в теоретической физике связана с тем, что большинство общепринятых фундаментальных и полуфундаментальных теорий* [6] *до сих пор базируются на основных понятиях механики Ньютона.*

1.2 Нерелятивистская механика материальной точки, движущейся ускоренно

Легко заметить, что между инерциальной и ускоренной системами отсчета никакого физического равноправия нет и быть не может. Согласно Эрнсту Маху [7] , это равноправие появиться тогда, когда мы сформулируем законы механики относительно ускоренных систем отсчета, а слабо ускоренную *((квази)инерциальную)* систему отсчета будем считать инерциальной. Руководствуясь этой идей, А. Эйнштейн выдвинул программу общей относительности [8], однако ему удалось найти релятивистское описание механики ускоренных систем отсчета, которые движутся поступательно, но не имеют собственного вращения (свободно падающие лифты Эйнштейна не вращаются). Поэтому вращательные координаты, вращательная метрика и вращательная относительность остались пределами теории Эйнштейна [9], что является фундаментальным упущением теории.

Безусловно, И. Ньютон был «пророком», но в его книге [10] мы находим только словесную формулировку законов механики Ньютона и видим простые геометрические доказательства справедливости этих законов. Весь аналитический аппарат механики Ньютона в современном виде был создан математиком Л. Эйлером [11], которого, по терминологии Л. Смолина, можно отнести к гениальным «ремесленникам». Л. Эйлера интересовали вычисления, а не размышления об основах механики.

В классической механике, для описания ускоренно движущейся материальной точки, используются две системы отсчета: инерциальная система S и произвольно ускоренная (с поступательным и вращательным ускорением) система отсчета S'. Приращение вектора $\vec{r}$ ускоренно движущейся частицы в системе S дается выражением [5]

$$d\vec{r} = d\vec{R} + d\vec{r}' = d\vec{R} + [\vec{d}\vec{\chi}\,\vec{r}'] + d'r', \tag{1}$$

где $d\vec{R}$ - приращение радиус-вектора $\vec{R}$, характеризующего положение начала O' ускоренной системы отсчета S', $\vec{d}\vec{\chi}$ - дифференциал (неголономных, что обозначено как $\vec{d}$) трех вращательных координат $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, $d'\vec{r}'$ - приращение радиус-вектора $\vec{r}'$, спроектированное на оси ускоренной системы отсчета S' (см. рис 1). Из (1) сразу следует зависимость $d\vec{r}$ от трех поступательных координат x, y, z и трех вращательных $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ координат. Если частица движется с произвольным ускорением, то изменение ее положения описывается 6-ю координатами и временем

$$d\vec{r} = d\vec{r}(x, y, z, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t) \tag{2}$$

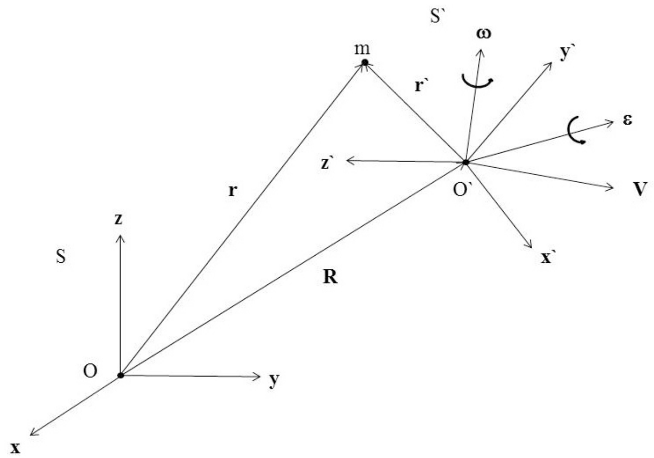

Рис. 1. Ускоренное движение массы m

Дифференцируя (2) по времени, получаем выражение для скорости ускоренной частицы

$$\vec{v}(x, y, z, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + [\frac{\vec{d}\vec{\chi}}{dt}\vec{r}'] + \frac{d'\vec{r}'}{dt} = \vec{V} + [\vec{\omega}\vec{r}'] + \vec{v}', \quad \vec{\omega} = \frac{\vec{d}\vec{\chi}}{dt} \ . \tag{3}$$

Пусть в (1) выполняется условие $\vec{R}=0$, т.е. начала систем S и S' совпадают, тогда из (3) следует

$$\frac{d\vec{r}'}{dt}=\frac{d'\vec{r}'}{dt}+[\vec{\omega}\vec{r}']=\vec{v}'+[\vec{\omega}\vec{r}'] , \tag{3a}$$

Во вращающихся системах отсчета, при переходе от не штрихованных дифференциалов d к штрихованным дифференциалам d', подобное соотношение существует для любого вектора $\vec{A}$ [5]

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{d'\vec{A}}{dt}+[\vec{\omega}\vec{A}] , \tag{3b}$$

поэтому имеем для векторов $\vec{v}'$ и $\vec{\omega}$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt}=[\vec{\omega}\vec{v}']+\frac{d'\vec{v}'}{dt} , \qquad \frac{d\vec{\omega}}{dt}=\frac{d'\vec{\omega}}{dt} . \tag{3c}$$

Дифференцируя (3) еще раз по времени и используя вспомогательные формулы (3*c*) получим

$$\vec{a}(x,y,z,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,t)=\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{W}+[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]+[\vec{\varepsilon}\vec{r}']+2[\vec{\omega}\vec{v}']+\vec{a}', \tag{4}$$

где $d\vec{R}/dt=\vec{V}$ – трансляционная скорость начала O' системы S', $d\vec{V}/dt=\vec{W}$ - трансляционное ускорение начала O' системы S', $d'\vec{v}'/dt=\vec{a}'$ -ускорение m относительно системы S', $d\vec{\chi}/dt=\vec{\omega}$ - угловая скорость, $d\vec{\omega}/dt=\vec{\varepsilon}$ - угловое ускорение системы S'.

Если на частицу действует внешнее силовое поле с потенциальной энергией U, то, вместо уравнений (4), умноженных на массу m, получим следующие уравнения ускоренного движения массы m

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}-m\vec{W}-m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]-2m[\vec{\omega}\vec{v}']-m[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r}']-m\vec{a}' . \tag{5}$$

В уравнениях (5) все силы, кроме $\vec{F}_{ext}=-\partial U/\partial\vec{r}$, представляют *собой силы инерции.* Когда силы инерции малы по сравнению с $\vec{F}_{ext}$, то ими можно пренебречь. Тогда система S' становится (квази)инерциальной и уравнения (5) подобны уравнениям движения механики Ньютона. Механика материальной точки, основанная на уравнениях (5) принципиально отличается от механики Ньютона. Эти отличия следующие:

1. В механике ускоренного движения существуют только неинерциальные системы отсчета.
2. В ней действуют силы инерции, не удовлетворяющие третьему закону механики Ньютона [5].
3. Для протяженных тел наблюдается действие *поля сил инерции*, порожденное полем инерции, поэтому природа полей и сил инерции относится к разделу теории поля, граничащей с механикой, а не к самой механике материальной точки.

4. Пространство (событий) отличается от пространства Евклида, поскольку содержит шесть координат: три трансляционных x, y, z и три вращательных $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.
5. Теория содержит две метрики: трансляционную метрику Евклида $(dl)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, описывающую бесконечно малое смещение и вращательную метрику $\vec{d}\vec{\chi}^2$, определяющую бесконечно малый поворот.

Действительно, положим, для простоты, в соотношении (1) $d'\vec{r}' = 0$ (как это имеет место в случае абсолютно твердого тела) и возведем (1) в квадрат

$$d\vec{r}^2 = (d\vec{R} + d\vec{r}')^2 = (d\vec{R} + [\vec{d}\vec{\chi}\,\vec{r}'])^2 = d\vec{R}^2 + 2d\vec{R}[\vec{d}\vec{\chi}\,\vec{r}'] + (\vec{d}\vec{\chi})^2(\vec{r}')^2. \qquad (6)$$

Поскольку $\vec{d}\vec{\chi}/dt = \vec{\omega}$ - (псевдо)вектор угловой скорости вращения системы отсчета, то из (6) следует: а) трансляционная метрика $d\vec{R}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; б) вращательная метрика, которую в простейшем случае можно записать как $\vec{d}\vec{\chi}^2 = d\varphi^2{}_1 + d\varphi^2{}_2 + d\varphi^2{}_3$ и в) перекрестный член $2d\vec{R}\,\vec{d}\vec{\chi}$.

Хотя соотношения (1)-(5) известны около 250 лет, никто из физиков не обратил внимания на существования в механике вращательной метрики и не рассматривал вращательные координаты $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ как элементы пространства.

Вывод № 2: *Одна из причин застоя теоретической физике связана с пренебрежительным отношением к вращательным координатам* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *и вращательной метрике* $\vec{d}\vec{\chi}^2$ *в теории относительности. В результате теория вращательной относительности не была осмысленна и не получила в физике своего развития.*

2. Механика ориентируемой материальной точки

Формулы (1)-(5) ставят перед нами вопрос – какова структура (геометрия) пространства событий, которое образует множество относительных координат ускоренных систем отсчета? Обычный ответ, который дают нам учебники по механике, - что это геометрия Евклида, противоречит формулам (1)-(5) и «приближенно верен» в частном случае, когда

$$d\vec{r}' = \vec{d}\vec{\chi} = d\vec{V} \approx 0, \qquad (7)$$

т.е. *когда (квази)инерциальная система отсчета* S' *движется прямолинейно и равномерно без вращения, при этом частица покоится в этой системе.* Поскольку инерциальных систем отсчета в природе не существует, то равенства (7) представляют собой достаточно сильное ограничение на реальные процессы, что приводит к их неправильному описанию и, как следствие, к непониманию целого ряда явлений. Например, в учебнике [12] на стр. 329 рассматриваются голономные преобразования трансляционных координат из «инерциальной» системы S «во вращающуюся» систему S' следующего вида

$$r' = r, \;\; z' = z, \;\; \varphi' = \varphi + \Omega t, \qquad (8)$$

где Ω - угловая скорость вращения системы S'. При этом не делается оговорки, что эта школьная формула справедлива только для плоского вращения (по одной угловой координате φ) и что угловые координаты являются неголономными, так, что в общем случае, никакими голономными преобразованиями координат вида (8) во вращающуюся систему S' перейти невозможно. Действительно, преобразования трансляционных координат $x, y, z,$ (преобразования Галилея-Ньютона) образуют 3D группу трансляций $T(3)$, в то время как преобразования неголономных вращательных координат образуют 3D группу вращений $O(3)$, которая в теории элементарных частиц оказывается группой внутренних симметрий. Математика запрещает переход из группы $T(3)$ в группу $O(3)$ голономными преобразованиями координат.

Ориентируемую материальную точку мы определим как тройку ортогональных, линейно независимых единичных векторов, жестко связанных с твердым телом. Устремив размеры тела к нулю подобно тому, как была определена материальная точка механики Ньютона, мы получим ориентируемую материальную точку. Понятно, что такой объект имеет шесть степеней свободы: три поступательных и три вращательных.

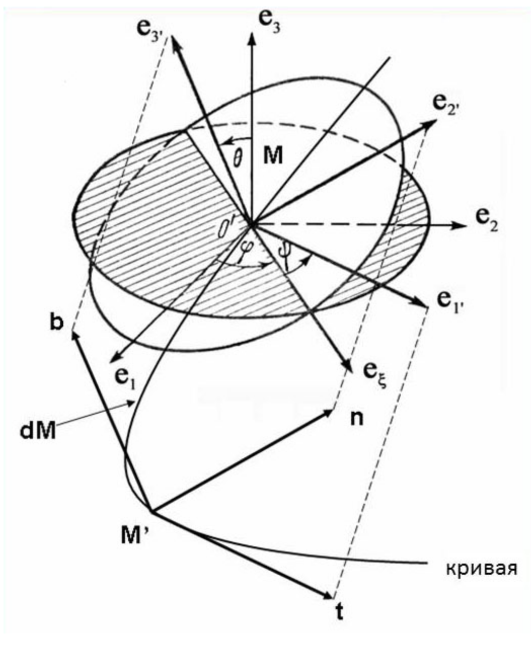

Рис.2. Движение ориентируемой материальной точки вдоль произвольной кривой

2.1 Уравнения Френе

Не ограничивая общности, возьмём произвольную траекторию, вдоль которой движется ориентируемая материальная точка. Введем в некоторой точке M траектории опорную триаду $\vec{e}_A$, $A = 1,2,3$ (математический аналог системы отсчета S'), образованную единичными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, удовлетворяющие условиям ортогональности

$$(\vec{e}_1)^2 = (\vec{e}_2)^2 = (\vec{e}_3)^2 = 1, \quad \vec{e}_1\vec{e}_2 = \vec{e}_2\vec{e}_3 = \vec{e}_3\vec{e}_1 = 0. \tag{9}$$

При движении вдоль траектории из точки M в точку M' триада меняет свою ориентацию (вращается см. рис.2). Переместив триаду $\vec{e}_A$ по траектории на расстояние $d\,M$, мы получим в точке M' триаду $\vec{e}'_A$. Спроектируем вектора триады $\vec{e}'_A$ в начальную точку M. Если в правой триаде выбрать единичный вектор $\vec{e}'_1 = \vec{t} = d\vec{x}/ds$, указывающий направление движения, касательным к траектории в точке M, вектор $\vec{e}'_2 = \vec{n}$ - вектором нормали и $\vec{e}'_3 = \vec{b}$ - вектором бинормали (рис.2), тогда для векторов t_α, n_α и b_α, спроектированных из точки M' в точку M, уравнения движения ориентируемой материальной точки принимают вид уравнений Френе [13]

$$\frac{dt_\alpha}{ds} = \kappa(s) n_\alpha \quad , \tag{10}$$

$$\frac{dn_\alpha}{ds} = -\kappa(s) t_\alpha + \chi(s) b_\alpha \quad , \tag{11}$$

$$\frac{db_\alpha}{ds} = -\chi(s) n_\alpha \quad , \quad \alpha, \beta, \gamma .... = 1,2,3. \tag{12}$$

Здесь $\kappa(s)$ - кривизна траектории, $\chi(s)$ - кручение траектории, однозначно определяющие произвольную кривую с точностью до положения в пространстве, ds - параметр длинны дуги, квадрат которой образует трансляционную метрику группе $T(3)$

$$ds^2 = (t^\alpha dx_\alpha)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{13}$$

Для полного описания динамики ориентируемой материальной точки, кроме трансляционных координат x, y, z, мы теперь имеем дополнительно три угла Эйлера (см. рис. 2)

$$\begin{gathered} \varphi = \angle \vec{e}_1 \vec{e}_\xi, \quad \theta = \angle\, \vec{e}_3 \vec{e}'_3, \quad \psi = \angle\, \vec{e}_\xi \vec{e}', \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \psi \le 2\pi . \end{gathered} \tag{13a}$$

Шесть независимых (в силу условий ортогональности (9)) уравнений (10)-(12) относительно шести независимых переменных $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$ распадаются на трансляционные уравнения движения

$$\frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} = \kappa(s) n_\alpha \quad , \tag{14}$$

$$\frac{d^3 x_\alpha}{ds^3} = \frac{d\kappa(s)}{ds} n_\alpha - \kappa^2(s) t_\alpha + \kappa(s)\chi(s) b_\alpha \quad , \tag{15}$$

которые, после умножения на массу m, заменяют уравнения Ньютона в механике ориентируемой точки, и вращательные уравнения

$$\frac{d\varphi}{ds} = \chi(s) \frac{\sin\psi}{\sin\theta} \quad , \tag{16}$$

$$\frac{d\psi}{ds} = \kappa(s) - \chi(s)\sin\psi\, ctg\,\theta \ , \tag{17}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \chi(s)\cos\psi, \tag{18}$$

отсутствующие в механике Ньютона. В уравнениях (16)-(18) в качестве угловых координат введены углы Эйлера φ,θ,ψ (см. рис.2).

Переходя в уравнении (14) от параметра s к параметру времени t с помощью соотношений

$$v_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{dx_\alpha}{ds}\frac{ds}{dt} = t_\alpha \frac{ds}{dt}\ , \quad \left|\vec{v}\right| = \frac{ds}{dt} = v, \quad w_\alpha = \frac{d^2x_\alpha}{dt^2} = \frac{d^2x_\alpha}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + t_\alpha \frac{d^2s}{dt^2} \ ,$$

имеем из (14) после умножения на массу m

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{t}\,\frac{dv}{dt} + m\vec{n}\kappa v^2. \tag{18a}$$

Поскольку в рассматриваемом случае $\vec{r}\,' = 0,\ \vec{r} = \vec{R},\ \left|\vec{r}\right| = \left|\vec{R}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, при этом кривизна траектории определяется как $\kappa = 1/r$, а скорость v, определяющее центростремительное ускорение $\vec{n}\kappa v^2$, в виде $v = \omega r$, то из (18a) следует

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = +m\vec{t}\,\frac{dv}{dt} + m\vec{n}\kappa v^2 = -m\vec{W} - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}\,]]. \tag{18b}$$

При движении во внешнем потенциальном поле U уравнения (18b) принимают вид

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W} - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}\,]]\ , \tag{18c}$$

где $-m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{R}]]$ - центробежная сила инерции, $-m\vec{W}$ - поступательная сила инерции. Если поле $U = -mMG/r$ и $dv/dt = 0,\ \chi = 0$ (значит $\vec{W} = 0$) , то ориентируемая материальная точка движется в центрально симметричном гравитационном поле массы M и $-\partial U/\partial\vec{r}$ представляет собой гравитационную силу, а $-m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{R}]]$ - центробежную силу инерции, локально компенсирующую в ускоренной системе отсчета гравитационную силу, создавая локальную невесомость. При этом $\vec{\omega}$ оказывается орбитальной угловой скоростью центра масс ориентируемой материальной точки.

В случае, когда в уравнениях Френе (10)-(12) $\kappa = 0,\ \chi \neq 0$, они принимают вид

$$1)\ \ \frac{dt_\alpha}{ds} = 0\ ,\quad 2)\ \ \frac{dn_\alpha}{ds} = \chi(s)b_\alpha\ ,\ 3)\ \ \frac{db_\alpha}{ds} = -\chi(s)n_\alpha\ , \tag{18d}$$

$$4)\ \ \frac{d^2x_\alpha}{ds^2} = 0\ ,\ 5)\ \ \frac{d^3x_\alpha}{ds^3} = 0$$

или, переходя с помощью соотношения $dt/ds = 1/v$, к дифференцированию по времени

$$1)\ \frac{dt_\alpha}{dt} = 0\ ,\quad 2)\ \frac{dn_\alpha}{dt} = \varpi\, b_\alpha\ ,\quad 3)\ \frac{db_\alpha}{dt} = -\,\varpi\, n_\alpha\ ,\quad \varpi = \chi\, v,$$

$$4)\ \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} = 0\ ,\quad 5)\ \frac{d^3 x_\alpha}{dt^3} = 0\ ,\quad |\vec{v}| = \frac{ds}{dt} = v = const.$$

Из этих уравнений видно, что начало O ориентируемой материальной точки движется по прямой траектории, при этом вектора n_α и b_α вращаются в плоскости перпендикулярной вектору t_α с угловой скоростью $\varpi = \chi v$. Эта величина описывает спиральность или собственную угловую скорость вращения ориентируемой материальной точки, которая направлена вдоль вектора t_α. Обозначая (формально) собственный угловой момент ориентируемой материальной точки как $L = J\varpi$, где J -момент инерции, и считая его постоянным, получаем из (18.d 1)) вращательные уравнения движения свободной ориентируемой материальной точки в виде

$$1)\frac{dL_\alpha}{dt} = 0,\quad L_\alpha = Lt_\alpha,\quad 2)\ \frac{dn_\alpha}{dt} = \varpi\, b_\alpha\ ,\quad 3)\ \frac{db_\alpha}{dt} = -\,\varpi\, n_\alpha\ ,\quad \varpi = \chi\, v.\ L = J\varpi = const. \qquad (18e)$$

В общем случае, из уравнения (12) следует

$$\left|\frac{db_\alpha}{ds}\right| = |-\,\chi(s)|\cdot|n_\alpha| = |\chi(s)|.$$

или

$$\left|\frac{db_\alpha}{dt}\right| = |\varpi(t)|, \qquad (18f)$$

Следовательно, абсолютная величина собственной угловой скорости вращения ориентируемой материальной точки равна скорости вращения вектора бинормали. Используя уравнения Френе, получим

$$\chi(s) = \frac{(\vec{x}'\cdot\vec{x}''\cdot\vec{x}''')}{(\vec{x}'\times\vec{x}'')^2}\ ,$$

где введено обозначение $\vec{x}' = d\vec{x}/ds$. Отсюда видно, что кручение (или собственное вращение – спин ориентируемой материальной точки) обращается в нуль, при равенстве нулю *третьей производной* трансляционной координаты $\vec{x}''' = d^3\vec{x}/ds^3$.

Вывод № 2а: *Механика, в которой нет третьей производной, не в состоянии описывать собственное вращение частиц.*

2.2 Вращательная метрика

Согласно теореме Эйлера, бесконечно малый поворот триады вокруг трех осей можно определить как один поворот вокруг мгновенной оси (рис.3) в соответствии с формулой [5]

$$\vec{d}\vec{\chi} = d\chi\,\vec{e}_{\chi} = \vec{e}_3 d\varphi + \vec{e}_{\xi} d\theta + \vec{e}_{3'} d\psi \ . \tag{19}$$

Используя (19), запишем дифференциал триады Френе как

$$d\vec{e}_A = [\vec{d}\vec{\chi}\,\vec{e}_A] \ . \tag{20}$$

Разделив левую и правую части (20) на дифференциал ds длинны дуги траектории, получаем уравнения движения 3D свободной ориентируемой материальной точки

$$\frac{d\vec{e}_A}{ds} = [\frac{\vec{d}\vec{\chi}}{ds}\vec{e}_A] = [\vec{\Omega}\,\vec{e}_A], \tag{21}$$

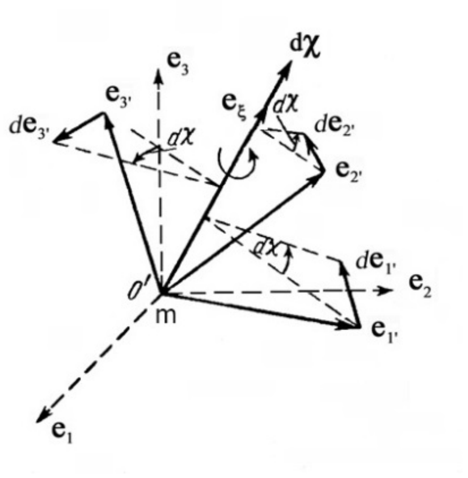

Рис. 3. Поворот вокруг мгновенной оси $\vec{e}_{\xi}$

где 3D - угловая скорость вращения $\vec{\Omega} = \vec{d}\vec{\chi}/ds = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ триады вокруг оси, совпадающей с вектором $\vec{e}_{\xi}$.

Чтобы найти аналитическое выражение для вращательной метрики, представим триаду Френе $\vec{e}_A$, $A = 1,2,3$ в виде $e^A{}_{\alpha}$, где $\alpha, \beta, \gamma... = 1,2,3$ - векторные индексы триады и $A, B, C... = 1, 2, 3$ - индексы, нумерующие векторы триады (или локальные индексы). Такая запись позволяет представить основные соотношения механики ориентируемой материальной точки в тензорном виде. Вместо (9), мы теперь имеем

$$e^A{}_{\alpha} e^{\alpha}{}_B = \delta^A{}_B, \quad e^A{}_{\alpha} e^{\beta}{}_A = \delta_{\alpha}{}^{\beta}, \tag{22}$$

где $\delta^A{}_B$, $\delta_{\alpha}{}^{\beta}$ - символы Кронекера. В тензорной записи соотношения (20) и (21) принимают вид

$$de^A{}_\alpha = d\chi^\beta{}_\alpha\, e^A{}_\beta \,, \tag{23}$$

$$\frac{de^A{}_\alpha}{ds} = \frac{d\chi^\beta{}_\alpha}{ds} e^A{}_\beta \ . \tag{24}$$

Умножая справа (23) и (24) на $e^\beta{}_A$, и, используя (22), получим

$$d\chi^\beta{}_\alpha = e^\beta{}_A\, de^A{}_\alpha \ , \tag{25}$$

$$\frac{d\chi^\beta{}_\alpha}{ds} = e^\beta{}_A\, \frac{de^A{}_\alpha}{ds} = \Omega^\alpha{}_\beta \ . \tag{26}$$

Дифференцируя (22), находим

$$e^A{}_\alpha\, de^\alpha{}_B + e^\alpha{}_B de^A{}_\alpha = 0, \tag{27}$$

откуда, с учетом (25), следует

$$d\chi_{AB} = -d\chi_{BA} \ , \tag{28}$$

а так же

$$d\chi_{\alpha\beta} = -d\chi_{\beta\alpha}\,, \qquad \Omega_{\alpha\beta} = -\ \Omega_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Используя (29), запишем (25) и (26) как

$$d\chi^\beta{}_\alpha = e^\beta{}_A\, de^A{}_\alpha \ = e^\beta{}_A\, e^A{}_{\alpha,\gamma} dx^\gamma = T^\beta{}_{\alpha\gamma} dx^\gamma \,, \tag{30}$$

$$\frac{de^A{}_\alpha}{ds} = T^\beta{}_{\alpha\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} e^A{}_\beta = \Omega^\beta{}_\alpha\, e^A{}_\beta \,, \tag{31}$$

где введены обозначения

$$T^\beta{}_{\alpha\gamma} = e^\beta{}_A\, e^A{}_{\alpha,\gamma} = -e^A{}_\beta e^\alpha{}_{A,\gamma} \ , \qquad ,\gamma = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \ , \tag{32}$$

$$\Omega^\beta{}_\alpha = T^\beta{}_{\alpha\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} \ . \tag{33}$$

Поскольку соотношение (30) представляет собой дифференциалы вращательных координат, то для вращательной метрики мы получаем

$$d\tau^2 = d\chi^\alpha{}_\beta d\chi^\beta{}_\alpha = T^\alpha{}_{\beta\gamma} T^\beta{}_{\alpha\sigma} dx^\gamma dx^\sigma = \Omega^\alpha{}_\beta \Omega^\beta{}_\alpha ds^2 \,. \tag{34}$$

Объект (32) был введен впервые в математике итальянским математиком Г. Риччи [14] и получил называние коэффициентов вращения Риччи. Согласно (34) именно эти величины определяет вращательную метрику в механике ориентируемой точки, поэтому в физических приложениях мы будем в дальнейшем называть объект (32) *торсионным полем.* В соответствии с формулами (29) и (33), *торсионное поле определяет вращение 3D ориентируемой материальной точки.*

Вывод № 3: *Угловые координаты* φ, ψ, θ *являются элементами пространства событий, порождающими торсионные поля. В физических теориях надо учитывать две метрики - трансляционную (13) и вращательную (34), при этом элементарным объектом механики оказывается ориентируемая материальная точка. Формулы (29) и (33)* ***дают аналитическое обоснование гипотезе Э. Картана [15]****, согласно которой* ***вращение материи порождает кручение пространства****.*

3. Геометрия пространства событий ориентируемой материальной точки

Триада $e^{A}{}_{\alpha}$ по координатному индексу α преобразуется в группе $T(3)$ как вектор

$$e^{A}{}_{\alpha'} = \frac{\partial x_{\alpha'}}{\partial x_{\alpha}} e^{A}{}_{\alpha} , \quad \left\| \frac{\partial x_{\alpha'}}{\partial x_{\alpha}} \right\| \in T(3), \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{35}$$

в то время как по локальному (внутреннему) индексу A триада преобразуется в группе вращений $O(3)$

$$e^{A'}{}_{\alpha} = \Lambda^{A'}{}_{A} e^{A}{}_{\alpha} , \quad \Lambda^{A'}{}_{A} \in O(3), \quad A = 1, 2, 3. \tag{36}$$

Поэтому голономные преобразования из группы трансляций $T(3)$ в группу вращений $O(3)$ в общем случае *недопустимы*. Исключение составляет случай, когда вращение происходит по одной угловой координате как в преобразованиях (8).

С помощью триады $e^{A}{}_{\alpha}$ можно переходить в соотношениях (30)-(34) от координатных индексов $\alpha, \beta, \gamma ...$ к локальным $A, B, C ...$ индексам. Например, торсионное поле (32), антисимметричное по индексам α и β можно представить в виде

$$T^{A}{}_{B\gamma} = e^{A}{}_{\alpha} T^{\beta}{}_{\alpha\gamma} e^{\beta}{}_{B} . \tag{37}$$

Используя это свойство, можно записать уравнения движения (31) как

$$\frac{de^{A}{}_{\alpha}}{ds} = T^{A}{}_{B\gamma} \frac{dx^{\gamma}}{ds} e^{B}{}_{\alpha} = \Omega^{A}{}_{B} \, e^{B}{}_{\alpha} . \tag{38}$$

Представим эти уравнения в виде

$$\frac{D^{*} e^{A}{}_{\alpha}}{ds} = \frac{de^{A}{}_{\alpha}}{ds} - \Omega^{A}{}_{B} \, e^{B}{}_{\alpha} = 0. \tag{38a}$$

где D^{*} ковариантная производная относительно связности $T^{A}{}_{B\gamma}$ [15]. Соотношение (38a) представляет собой ковариантную запись формулы (3b).

Выбирая $\vec{e}_{(1)} = \vec{t} = d\vec{x}/ds$, распишем уравнения (38) покомпонентно с учетом антисимметрии $T^{A}{}_{B\gamma}$ по локальным индексам A и B

$$\frac{de^{(1)}{}_{\alpha}}{ds} = T^{(1)}{}_{(2)\gamma}\frac{dx^{\gamma}}{ds}e^{(2)}{}_{\alpha} = \Omega^{(1)}{}_{(2)}\,e^{(2)}{}_{\alpha}\,. \tag{39}$$

$$\frac{de^{(2)}{}_{\alpha}}{ds} = T^{(2)}{}_{(1)\gamma}\frac{dx^{\gamma}}{ds}e^{(1)}{}_{\alpha} + T^{(2)}{}_{(3)\gamma}\frac{dx^{\gamma}}{ds}e^{(3)}{}_{\alpha} = \Omega^{(2)}{}_{(1)}\,e^{(1)}{}_{\alpha} + \Omega^{(2)}{}_{(3)}\,e^{(3)}{}_{\alpha}. \tag{40}$$

$$\frac{de^{(3)}{}_{\alpha}}{ds} = T^{(3)}{}_{(2)\gamma}\frac{dx^{\gamma}}{ds}e^{(2)}{}_{\alpha} = \Omega^{(3)}{}_{(2)}\,e^{(2)}{}_{\alpha}\,. \tag{41}$$

Введем обозначения

$$\kappa(s) = \Omega^{(1)}{}_{(2)} = T^{(1)}{}_{(2)\gamma}\frac{dx^{\gamma}}{ds}, \qquad \chi(s) = \Omega^{(2)}{}_{(3)} = T^{(2)}{}_{(3)\gamma}\frac{dx^{\gamma}}{ds}, \tag{42}$$

тогда, с учетом того, что $\vec{e}_2 = \vec{n}$, $\vec{e}_3 = \vec{b}$, уравнения (39)-(41) принимают вид уравнений Френе (10)-(12).

Учитывая все сказанное выше, естественно поставить вопрос, как устроено пространство событий, элементами которого являются ориентируемые точки? Для поиска ответа на этот вопрос представим трансляционную метрику (13) в произвольных криволинейных координатах

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} = \eta_{AB}e^{A}{}_{\alpha}e^{B}{}_{\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}\,, \qquad \eta_{AB} = \eta^{AB} = diag(1,1,1)\ , \tag{43}$$

а бесконечно малый поворот триады (30) в виде

$$d\chi^{\beta}{}_{\alpha} = e^{\beta}{}_{A}\ De^{A}{}_{\alpha} = e^{\beta}{}_{A}\,e^{A}{}_{\alpha,\gamma}dx^{\gamma} = \Delta^{\beta}{}_{\alpha\gamma}dx^{\gamma}\,. \tag{44}$$

В трансляционной метрике (43) метрический тензор

$$\overset{0}{g}_{\alpha\beta} = \eta_{AB}e^{A}{}_{\alpha}e^{B}{}_{\beta}\,, \qquad \eta_{AB} = \eta^{AB} = diag(1,1,1)\ , \quad \alpha,\beta,\gamma... = 1,2,3\ ,\ A,\ B\ ,C... = 1,\ 2,\ 3$$

определяется теперь через неголономную триаду $e^{A}{}_{\alpha}$. С другой стороны, в соотношении (44) величина $\Delta^{\beta}{}_{\alpha\gamma}$, определяемая как

$$\Delta^{\beta}{}_{\alpha\gamma} = e^{\beta}{}_{A}\,e^{A}{}_{\alpha,\gamma}\,, \tag{45}$$

называется связностью геометрии *абсолютного параллелизма* [15]. Можно показать, что тензор кривизны пространства с метриками (43), (34) и связностью (45) обращается в нуль [16]

$$S^{\alpha}{}_{\beta\gamma\eta} = 2\ \Delta^{\alpha}{}_{\beta[\eta,\gamma]} +\ 2\Delta^{\alpha}{}_{\rho[\gamma}\ \Delta^{\rho}{}_{|\beta|\eta]} = 0 \tag{46}$$

и *равенства (45),(46) является в механике ориентируемой материальной точки определением геометрии пространства событий как пространства абсолютного параллелизма.* Связность (45) представляется в виде суммы (см. математическую часть работы [15])

$$\Delta^{\beta}{}_{\alpha\gamma} = \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\gamma} + T^{\beta}{}_{\alpha\gamma} = e^{\beta}{}_{A}\, e^{A}{}_{\alpha,\gamma}\,, \tag{47}$$

где

$$\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} g^{\beta\delta}(g_{\alpha\delta,\gamma} + g_{\gamma\delta,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\delta}) \tag{48}$$

-символы Кристоффеля,

$$T^{\beta}{}_{\alpha\gamma} = -\Omega^{\cdot\cdot\beta}{}_{\alpha\gamma} + g^{\alpha\delta}(g_{\alpha\mu}\Omega^{\cdot\cdot\mu}{}_{\delta\gamma} + g_{s\mu}\Omega^{\cdot\cdot\mu}{}_{\delta\alpha}) \tag{49}$$

- торсионное поле (или коэффициенты вращения Риччи),

$$\Omega^{\cdot\cdot\beta}{}_{\alpha\gamma} = -\,\Delta^{\beta}{}_{[\alpha\gamma]} = -\frac{1}{2} e^{\beta}{}_{A}(e^{A}{}_{\alpha,\gamma} - e^{A}{}_{\gamma,\alpha}) \tag{50}$$

- кручение геометрии абсолютного параллелизма (или объект неголономности) [16]. Это объект исчезает, если угловые координаты не являются динамическими переменными, связанными со структурой пространства. Действительно, при условии

$$\Omega^{\cdot\cdot\beta}{}_{\alpha\gamma} = -\frac{1}{2} e^{\beta}{}_{A}(e^{A}{}_{\alpha,\gamma} - e^{A}{}_{\gamma,\alpha}) = 0 \tag{51}$$

угловые координаты $\varphi,\ \theta,\ \psi$ становятся голономными, при этом вращательная метрика (34) обращается в нуль. В этом случае мы можем переходить от (декартовых) координат $x, y,\ z$ к угловым (сферическим) координатам $\varphi,\ \theta,\ \psi$ с помощью голономных преобразований. В результате мы получаем сферическую, цилиндрическую и т.д. системы координат, которые удобно использовать при решении многих практических задач в пространстве Евклида. Понятно, что *голономные угловые координаты* $\varphi,\ \theta,\ \psi$ *не имеют никакого отношения к вращательному движению материи.*

Из определения (45) следуют уравнения параллельного переноса векторов триады $e^{A}{}_{\alpha}$

$$\frac{D^{*}e^{A}{}_{\alpha}}{ds} = \frac{de^{A}{}_{\alpha}}{ds} - \Delta^{\beta}{}_{\alpha\gamma}\frac{dx^{\gamma}}{ds}e^{A}{}_{\beta} = 0\,, \tag{52}$$

где D^{*} - ковариантная производная относительно связности $\Delta^{\beta}{}_{\alpha\gamma}$.

Учитывая (45), получаем вместо уравнений (31) более общие уравнения

$$\frac{de^{A}{}_{\alpha}}{ds} = \Delta^{\beta}{}_{\alpha\gamma}\frac{dx^{\gamma}}{ds}e^{A}{}_{\beta} = \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\gamma}\frac{dx^{\gamma}}{ds}e^{A}{}_{\beta} + T^{\beta}{}_{\alpha\gamma}\frac{dx^{\gamma}}{ds}e^{A}{}_{\beta}\,. \tag{53}$$

При этом дополнительный член $\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\gamma}e^{A}{}_{\beta}\, dx^{\gamma}/ds$, как показано в [16], описывает внешнее взаимодействие (скажем, гравитационное), а $T^{\beta}{}_{\alpha\gamma}e^{A}{}_{\beta}\, dx^{\gamma}/ds$ определяет поля и силы инерции [9].

Механика, в которой объект неголономности (51) отличен от нуля мы будем называть *неголономной механикой,* в силу того, что связь (44) между дифференциалами трансляционных координат dx^{γ} и дифференциалами вращательных координат $d\chi^{\beta}{}_{\alpha}$ неголономна.

Наглядно структура пространства $A_3(3)$ механики ориентируемой точки представлена на рис.4. На этом рисунке изображено базовое пространств трансляционных координат $x, y, z,$ на котором задана трансляционная метрика $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} = \eta_{AB}e^{A}{}_{\alpha}e^{B}{}_{\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}$ и действует локальная группа трансляций $T(3)$. В каждой точке M базового пространства задано пространство угловых координат $\varphi,\ \theta,\ \psi$ (слой), изображенное в виде сферы, на котором задана вращательная метрика $d\tau^2 = d\chi^{\alpha}{}_{\beta}d\chi^{\beta}{}_{\alpha} = T^{\alpha}{}_{\beta\gamma}T^{\beta}{}_{\alpha\sigma}dx^{\gamma}dx^{\sigma}$ и действует локальная группа вращений $O(3)$.

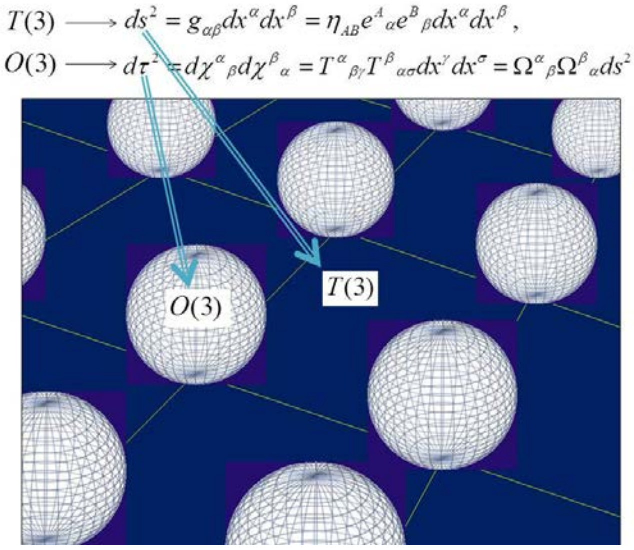

Рис.4. Структура расслоенного пространства абсолютного параллелизма $A_3(3)$

Подобное пространство существует в теории калибровочных полей. Например, в уравнения (38) входит торсионное поле $T^{A}{}_{B\gamma}$, у которого локальные индексы A и B - калибровочные индексы, а индекс γ - координатный индекс. Калибровочной группой в нашем случае оказывается группа вращений $O(3)$, при этом калибровочное поле $T^{A}{}_{B\gamma}$ принимает ясный физический смысл: - в соответствии с формулой (33) оно определяет угловую скорость вращения ориентируемой материальной точки.

Вывод № 4: *Пространство событий 3D ориентируемых материальных точек наделено структурой геометрии абсолютного параллелизма* $A_3(3)$. *Оно обладает кручением (50),* *образующим торсионное поле (49). Механика ускоренно движущихся систем отсчета является неголономной. В такой механике всякое движение есть вращение (тезис Декарта), которое определяется через калибровочное поле $T^{A}{}_{B\gamma}$.*

4. Механика твердого тела

Твердое тело в классической механике представляется как система материальных точек, расстояние между которыми не меняется. Конечно, это такой же идеальный объект, как и материальная точка. Действительно, все реальные тела подвержены деформации и мы просто пренебрегаем этой деформацией, считая ее незначительной. Считая, что тело состоит из N материальных точек массы m, так, что полная масса тела $m=\sum_{i=1}^{N} m_i$, где m_i - масса i -ой материальной точки, находим положение центра масс системы по формуле

$$\vec{r}_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m} , \qquad (i = 1,2,...\mathrm{N}) , \tag{54}$$

где $\vec{r}_i$ - радиус вектор i -ой материальной точки в системе отсчета S. Поместим начало отсчета системы S', жестко связанной с абсолютно твердым телом в центр масс. При вращении тела для $\vec{r}_i$ мы имеем

$$\vec{r}_i(x, y, z, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t) = \vec{r}_{o'} + \vec{r}_i\,' , \tag{55}$$

$$\vec{v}_i(x, y, z, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t) = \vec{v}_{o'} + [\omega \vec{r}_i\,'], \tag{56}$$

где, $\vec{r}_{o'}$ - радиус вектор центра масс, $\vec{v}_{o'}$ - скорость центра масс, $\vec{v}_i$ - скорость i -ой материальной точки, $[\omega \vec{r}_i\,']$ - линейная скорость i -ой материальной точки, вызванная вращением тела относительно системы S. Таким образом, для материальных точек твердого тела мы имеем такую же зависимость расстояний $\vec{r}_i$ и скоростей $\vec{v}_i$ от 6 координат $x, y, z, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, как и механике ориентируемой материальной точки. Поскольку в нашем случае $\vec{v}_m = \vec{v}_{o'}$ то полный импульс тела равен

$$\vec{P} = m\vec{v}_m = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i , \qquad (i = 1,2,...\mathrm{N}). \tag{57}$$

и для него, формально, можно записать уравнения движения механики Ньютона в системе S

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}_e , \tag{58}$$

где $\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ei}$ - сумма внешних сил, действующих на твердое тело.

Поместим начало системы S в центр масс твердого тела, так, что начала бы систем S и S' совпадали. Тогда мы можем записать момент импульса i - ой материальной точки в виде $\vec{L}_i = m_i[\vec{r}_i'\vec{v}_i'] = m_i[\vec{r}_i'[\omega\vec{r}_i']]$ и для полного момента импульса $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i$ уравнения

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}_e \ , \tag{59}$$

где $\vec{M}_e$ - момент внешних сил. Формальный вывод уравнений (58) и (59), полученных впервые Л. Эйлером, создает впечатление, что они являются следствием механики Ньютона. Однако соотношения (55) и (56) показывают, что геометрия пространства событий механики твердого тела отлична от геометрии Евклида, лежащей в основе механики Ньютона. Кроме того, при переходе в уравнениях (58) и (59) во вращающуюся систему отсчета S', с учетом формулы (3b), мы имеем

$$\frac{d'}{dt}\vec{P} + [\vec{\omega}\vec{P}] = \vec{F}_e \ , \tag{60}$$

$$\frac{d'}{dt}\vec{L} + [\vec{\omega}\vec{L}] = \vec{M}_e \ . \tag{61}$$

Легко заметить, что в уравнениях (60), (61) импульс центра масс $\vec{P}$ и угловой импульс $\vec{L}$ оказываются зависимыми друг от друга, что недопустимо в механике Ньютона, но вполне уместно в неголономной механике ориентируемой точки благодаря вращательной метрике (34). Поэтому, механика, основанная на уравнениях (60),(61), как минимум, неголономна и ее законы сохранения обобщают законы сохранения механики Ньютона.

В качестве примера, рассмотрим движение свободного твердого тела (гироскопа), когда правая часть уравнений (60),(61) обращается в нуль

$$\frac{d'}{dt}\vec{P} + [\vec{\omega}\vec{P}] = 0 \ , \tag{62}$$

$$\frac{d'}{dt}\vec{L} + [\vec{\omega}\vec{L}] = 0 \ . \tag{63}$$

Выберем оси вращающейся вместе с телом системы отсчета S' так, чтобы они совпадали с главными осями инерции тела, тогда

$$L_1 = J_1\omega_1 \ , \ L_2 = J_2\omega_2 \ , \ L_3 = J_3\omega_3 , \tag{64}$$

где J_1, J_2, J_3 - главные моменты инерции, ω_1, ω_2, ω_3 - компоненты угловой скорости вращения гироскопа.

Покомпонентная запись уравнений (62) и (63) имеет вид [17]

$$m\frac{d'v_1}{dt} = -m\omega_2 v_3 + m\omega_3 v_2 \ ,$$
$$m\frac{d'v_2}{dt} = -m\omega_3 v_1 + m\omega_1 v_3 \ , \qquad (65)$$
$$m\frac{d'v_3}{dt} = -m\omega_1 v_2 + m\omega_2 v_1 \ ,$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = -\frac{(J_3 - J_2)}{J_1}\omega_2\,\omega_3 \ ,$$
$$\frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{(J_1 - J_3)}{J_2}\omega_1\,\omega_3 , \qquad (66)$$
$$\frac{d\omega_3}{dt} = -\frac{(J_2 - J_1)}{J_3}\omega_1\,\omega_2 .$$

Интегрируя уравнения (66) при условии $J_2 - J_1 = 0$, находим

$$\omega_1 = C\cos\Omega t \ , \quad \omega_2 = C\sin\Omega t \ , \ C = \sqrt{\omega_1^{\ 2} + \omega_2^{\ 2}} = const. \quad \omega_3 = \omega_0 = const, \quad \Omega = \omega_3\left(J_3 - J_1\right)\Big/J_1 , \ (67)$$

где Ω - *угловая скорость нутации.* Подставляя найденное решение в уравнения (65), имеем уравнения для скорости центра масс

$$m\frac{d'v_1}{dt} = m\left(-C\sin\Omega t\ v_3 + \omega_0 v_2\right),$$
$$m\frac{d'v_2}{dt} = m\left(-\omega_0 v_1 + C\cos\Omega t\, v_3\right), \qquad (68)$$
$$m\frac{d'v_3}{dt} = m\left(-C\cos\Omega t v_2 + C\sin\Omega t v_1\right).$$

Интегрируя эти уравнения, получим [17]

$$\vec{v}(t) = C_1\vec{\mathrm{V}}_1(t) + C_2\vec{\mathrm{V}}_2(t) + C_3\vec{\mathrm{V}}_3(t), \qquad (69)$$

где константы C_1, C_2, C_3 в соотношении (68) определяются из начальных условий и

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} A_0\cos\Omega t \\ A_0\sin\Omega t \\ R_0 + 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} A_1 e^{i(\Omega-\beta)t} + B_1 e^{-i(\Omega+\beta)t} \\ -iA_2 e^{i(\Omega-\beta)t} + iB_1 e^{-i(\Omega+\beta)t} \\ \left(R_1 + R_2 + 1\right)e^{-i\beta t} \end{pmatrix}, \ \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} A_2 e^{i(\Omega+\beta)t} + B_2 e^{-i(\Omega-\beta)t} \\ -iA_2 e^{i(\Omega+\beta)t} + iB_2 e^{-i(\Omega-\beta)t} \\ \left(R_3 + R_4 + 1\right)e^{i\beta t} \end{pmatrix}.$$

Здесь A_0, A_1, A_2, B_1 , B_2 R_0, R_1 , ..., R_4 , β - константы, так же определяемые из начальных условий через шесть основных констант $C1, C2, C2, \Omega, \omega_0, C$. Например, выбирая угловые скорости задачи равными С=8, Ω=5, ω_0=100, начальное положение и начальную скорость центра масс в виде $\vec{x}(0) = (x(0), y(0)\ , z(0)\ ) = \vec{0}$, $\vec{v}(0) = (1, 1, 1)$, получим в этом примере константы C1=0.000162007609770, C2=0.000000131643299 + 0.000000142913486i, C3= -0.036728116995517 + 0.039872468227959i. Все вычисления были выполнены в программе Matlab. Результаты расчетов при этих начальных условиях представлены на рис.5

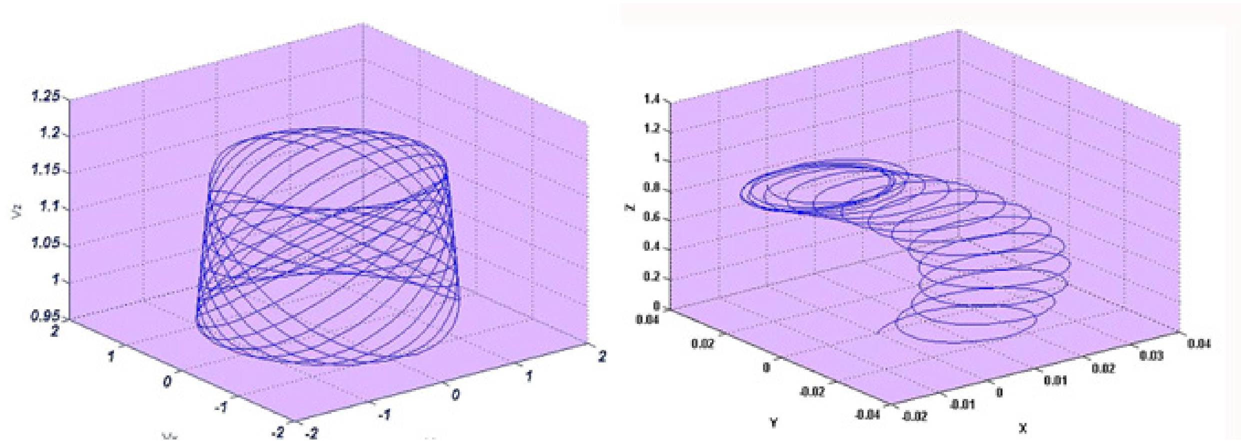

Рис.5. Изменение скорости (слева) и координаты центра масс (справа) свободного гироскопа при его нутации

Полученные результаты *находятся в явном противоречии с первым законом механики Ньютона*, согласно которому центр масс свободного от внешних сил тела может двигаться только прямолинейно и равномерно.

Единственно разумное теоретическое объяснение полученному результату можно получить в том случае, если мы опираемся на механику ориентируемой материальной точки. В самом деле, уравнения движения каждой материальной точки и, конечно, центра масс свободного от внешних сил твердого тела (65) происходит в пространстве абсолютного параллелизма $A_3(3)$, а не в геометрии Евклида. Геодезическое движение (движение по инерции) в геометрии $A_3(3)$ отлично от прямолинейного и равномерного, при этом выполняется закон сохранения полной энергии вращающегося тела, но, как мы показали выше, допускается нарушение закона сохранения поступательного импульса механики Ньютона. Действительно, в уравнениях (68) на центр масс действуют силы инерции, которые не подчиняются третьему закону Ньютона. Именно они вызывают ускоренное движение центра масс твердого тела, вызывая в гироскопических системах наблюдаемое на опыте явление нутации.

На рис. 6 представлена одна из траекторий движения материальной точки сфероидального свободного гироскопа, который вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$ и скоростью нутации $\vec{\Omega}$ [18].

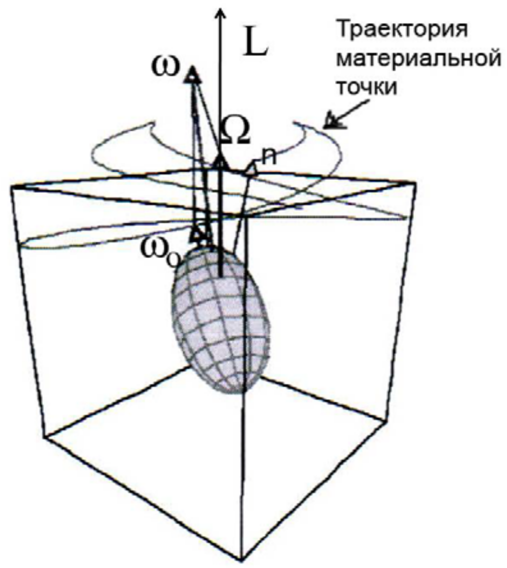

Рис.6. Траектория движение точек тела при свободной прецессии (нутации) сфероида

Вектор угловой скорости $\vec{\Omega}$ *неподвижен* в пространстве для внешнего наблюдателя, а его направление совпадает с направлением вектора $\vec{L}$. Ось вращения гироскопа и направленный вдоль нее вектор $\vec{\omega}_0$ прецессирует вокруг вектора $\vec{L}$ с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Все три вектора $\vec{\omega}, \vec{\omega}_0$ и $\vec{\Omega}$ лежат в одной плоскости, поэтому $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\Omega}$. Особенно интересно на рис.6 выглядят траектории материальных точек, составляющих тело. Для этого «воткнем» в сфероид вектор $\vec{n}$, в точку, не лежащую на оси вращения. Конец этого вектора будет описывать траекторию материальной точки сфероида на сфере, центр которой неподвижен и находится на оси вращения. Как показывают расчета, эти траектории совсем не плоские окружности и, при определенных начальных условиях, представляют собой далеко не гладкие кривые (см.рис.6). И это всё при свободном вращении тела.

В теории твердого тела есть проблемы с законами сохранения. Например, уравнения (60) и (61) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений Эйлера-Пуассона [19], для которой известны три общих первых интеграла. Существует теорема Якоби, которая утверждает, что для сведения задачи к квадратурам достаточно для этих уравнений найти еще один новый (четвертый) первый интеграл, независящий от времени. При ограничениях на распределение масс в твердом теле, новый интеграл удалось найти в трех случаях: Эйлера, Лагранжа и Ковалевской [19]. Однако, в общем случае, дополнительный интеграл не был найден, несмотря на усилия выдающихся математиков в течение двухсот лет. Была только доказана теорема [20], которая утверждает, что в общем случае *уравнения Эйлера-Пуассона не имеют не только алгебраического, но и аналитического нового дополнительного первого интеграла*.

С моей точки зрения, природа этой проблемы выходит за рамки математики и связана с неправильной физической формулировкой задачи. Дело в том, что шесть уравнений (60), (61) не следуют из механики Ньютона, как это принято считать, а представляют собой ее нетривиальное обобщение и *требуют расширение физических основ классической механики* [21]. Это обстоятельство заметили многие ведущие специалисты по теории гироскопов.

Например, вот что пишет по этому вопросу известный ученый К. Магнус [22]: «Чтобы объяснить поведение вращающегося тела, часто проводят аналогию между вращательным движением тела и движением материальной точки (т.е. механики Ньютона (прим. автора)). Однако эта аналогия в теории гироскопа скорее вредна, чем полезна, так как область, в которой она справедлива, кончается как раз там, где начинаются типичные гироскопические явления (прецессия и нутация (прим. автора))».

Ему вторит другой специалист по теории гироскопов Р. Граммель [23]: «Анизотропия твердого тела, порождаемая его вращением, не имеет аналога в механике материальной точки (т.е. механике Ньютона (прим. автора)). Если нанести удар по покоящейся материальной частице, она начинает двигаться в направлении ударного импульса. И, напротив, совсем не обязательно, чтобы приложение к покоящемуся телу ударного момента вызвало вращение тела именно вокруг той оси, относительно которой действовал момент».

Вывод № 5: *Механика твердого тела является первым обобщением механики Ньютона. Аналитически это обобщение было сделано Л. Эйлером, но не понято физиками как теория, обобщающая механику Ньютона. Механика основывается на понятии абсолютно твердого тела, не существующего в реальности.*

5. Общее заключение по проблемам классической механики

Классическая механика является основой всей физики и поэтому логические противоречия и ошибочные представления, положенные в ее основу, являются сильнейшим тормозом в развитии всей современной физики. Пренебрежительной отношение к вращательным координатам, вращательной метрике и торсионным полям, порождающим поля и силы инерции в механике, породило огромное количество феноменологических, конструктивных и академических теорий, которые занимаются косвенным описанием наблюдаемых явлений и поэтому бессодержательны и не имеют будущего. Время требует принципиального и глубоко пересмотра основ классической механики. Без привлечения вращательных координат и вращательной относительности, без выяснения роли полей и сил инерции в теории элементарных частиц, ни одна из пяти перечисленных во введении проблем, не может быть решена.

Автор надеется, что предложенная им механика Декарта [24- 26], которая сводит все движения к вращению (идея Декарта), является той «путеводной звездой», которая выведет теоретическую физику из застоя.

30.01.2014.

(Продолжение следует).

Литература

1. *Смолин Л. //* Неприятности с физикой: взлет теории струн, упадок науки и что за этим следует. Бостон, 2006, 1955 с. (См. перевод с английского на русский на сайте http://www.rodon.org/sl/nsfvtsunichzes/).
2. *Грин Б. //* Элегантная Вселенная, М.: Едиториал УРСС, 2005, 288 с.
3. *Пенроуз. Р //* Путь к Реальности. Из-во: Институт компьютерных исследований, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" 2007 г.
4. *Герц Г. //* Принципы механики, изложенные в новой связи. Наука, М., 1959, с. 19.
5. *Ольховский И.И.//* Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970.
6. *Шипов Г.И.* // Об оценке работ по теоретической физике // «Академия Тринитаризма», М., 12.05.2007. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/02311068.htm
7. *Мах Э. //* Механика. Историко-критический очерк ее развития. Пер. с нем. Изд.2 2011. 456 с.
8. *Эйнштейн А.* // Собр. науч. тр. М.: Наука, 1967. Т. 1.
9. *Шипов Г.*И. // Программа Всеобщей относительности и теория Физического Вакуума. 25 лет спустя. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ.18170, 02.09.2013. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/02311068.htm .
10. *Ньютон И.* // Математические начала натуральной философии. Перевод с латинского и примечания А. Н. Крылова. М.: Наука, 1989. 688 стр. ISBN 5-02-000747-1.
11. *Эйлер Л. //* Основы динамики точки. ОНТИ-НКТП-СССР, 1938, с. 537.
12. *Ландау Л.Д.,Лифшиц Е.М.* // Теория поля. Т.2. М.: Наука, 1988.
13. *Frenet F.* //Jour. de Math. 1852. Vol. 17. P. 437-447.
14. *Ricci G.*// Mem. Acc. Linc. 1895. Vol.2. Ser. 5. Pp. 276-322.
15. *Cartan E.* // Compt. Rend.1922. Vol. 174, p. 437.
16. Теория Физического Вакуума, теория эксперименты и технологии, М., Наука, 1997. 450 с.
17. *Шипов Г.И., Сидоров А.Н.* // О наблюдении действия сил инерции в инерциальных системах отсчета. «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17140, 24.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/02311094.htm
18. *Бутиков Е.И.//*Прецессия и нутация гироскопа. Компьютерная программа по расчету прецессии и нутации, http://faculty.ifmo.ru/butikov/Applets/GyroscopeR.pdf
19. *Архангельский Ю.А. //* Аналитическая динамика твердого тела. М., Наука, 1977, с.3.
20. *Козлов В.В.//* Вестник МГУ, № 1, 1975, с.105.
21. *Шипов Г.И.*// Почему необходимо переписывать учебники по классической механике. На сайте http://shipov-vacuum.com выбрать проекты, теорию, механика и кликнуть на синей части названия статьи. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161655.htm
22. *Магнус К//.* Гироскоп: теория и применение. М.: Мир, 1974, с. 526.
23. *Граммель Р.* // Гироскоп, его теория и применения, т. 1. т. 2, ИЛ, М., 1952.

24. *Shipov G.* // Decartes' Mechanics - Fourth Generalization of Newton's Mechanics. In "7th Intern.Conference Computing Anticipatory Systems"~ HEC - ULg, Liege, Belgium, 2005. P. 36.
25. *Шипов Г.И.* // 4D гироскоп в механике Декарта. МИФВ., М.: Кирилица, 2006. с.с. 73., или http://www.shipov-vacuum.com и http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/004a/02311026.htm
26. *Шипов Г.И.*// Теория Физического Вакуума, теория эксперименты и технологии, М., Наука, 1997. 450 с.