МЕЖДУНАРОДНЫЙ ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ
ФИЗИКИ РАЕН

Г.И.ШИПОВ

# ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКОГО ВАКУУМА

## ТЕОРИЯ, ЭКСПЕРИМЕНТЫ И ТЕХНОЛОГИИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

МОСКВА «НАУКА»
1997

ББК 22.311
Ш 63
УДК 530.1; 530.12; 530.145; 513.731; 533.9.01

Рецензенты:
доктор физико-математических наук,
профессор *Р.Н.Кузьмин*,
доктор физико-математических наук,
профессор *А.А.Рухадзе*.

**Шипов Г.И**
Ш 63 Теория физического вакуума: Теория, эксперименты и технологии. 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1996. – 450 с.

ISBN 5-02-003682-X

Настоящая книга представляет собой второе издание (первое вышло в 1993 г.) монографии автора, дающее более детальное изложение основ теории физического вакуума. Кроме того, приводятся теоретические и экспериментальные следствия теории вакуума и торсионных полей. Большое внимание уделяется технологиям, которые возникли благодаря новым теоретическим и экспериментальным результатам.

Для специалистов по теоретической физике, преподавателей вузов, аспирантов, студентов, а также для всех тех, кто интересуется новыми физическими теориями, экспериментами и технологиями.

Ш$\frac{1604030000-167}{042(02)-96}$ Без объявления ББК 22.311

ISBN 5-02-003682-X

# ПРЕДИСЛОВИЕ К ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во второе издание вошли материалы лекций, прочитанных автором осенью 1993 и весной 1996 г. на физическом факультете Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова. Дано более подробное изложение идей и принципов, лежащих в основе теории физического вакуума. Основные дополнения коснулись экспериментальных работ, описывающих воздействие статических и динамических торсионных полей на различные физические объекты. Большое внимание уделено торсионным технологиям, т.е. эксперименту в промышленных масштабах. Эти материалы, предоставленые автору А.Е.Акимовым, изложены в гл. 5.

Автор выражает особую благодарность Л.М.Грушиной, без активного содействия которой книга не увидела бы свет.

*Геннадий Шипов*

Москва, июнь 1996 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга представляет собой краткое изложение идей и методов, использованных автором для развития программы Клиффорда–Эйнштейна по геометризации уравнений физики, а также для решения различных фундаментальных проблем современной теоретической физики с позиций всеобщего принципа относительности и теории физического вакуума. Проводя исследования, автор попытался объединить, казалось бы, различные по своей природе явления и нарисовать обозримую картину современной физики.

Автор выражает благодарность В. Ю. Татуру и всем тем, кто прямо или косвенно способствовал появлению этой книги. Особо хочу отметить большую помощь моих друзей и единомышленников: Е. А. Губарева, А. Н. Сидорова, И. А. Володина.

Многие идеи, развиваемые в этой книге, были обозначены в моей первой монографии, изданной в 1979 г. в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова благодаря поддержке М. А. Адаменковой и И. С. Лакоба.

Весьма плодотворными были беседы с доцентом Словацкого политехнического института В. Скальским, который высказал ценные мысли относительно различных вакуумных состояний материи. Полезные замечания А. Е. Акимова во многом стимулировали мои исследования в области торсионных полей и взаимодействий.

Все это сыграло большую роль в написании предлагаемой читателю книги.

*Геннадий Шипов*

Москва, май 1993 г.

# Принятые обозначения

Трехмерные тензорные индексы обозначаются греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ и пробегают значения 1, 2, 3.

Трехмерные вектора (например, линейной и угловой скоростей) обозначаются как: $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ или $\mathbf{v}$ и $\omega$.

Четырехмерные тензорные индексы обозначаются латинскими буквами $i, j, k \ldots$ и принимают значения 0, 1, 2, 3. Буквы из первой части алфавита $(a, b, \ldots, h)$ используются в качестве тетрадных индексов, например $e^i{}_a$ $(a = 0, 1, 2, 3)$ .

Спинорные индексы в спинорном $\Delta$-базисе обозначаются заглавными буквами $A, B, \ldots, \dot{C}, \ldots, \dot{D}$ и пробегают значения 0,1 или $\dot{0}, \dot{1}$. Спинорные индексы в $\Gamma$-базисе обозначаются греческими буквами $\alpha, \beta, \ldots, \dot{\gamma}, \dot{\delta}, \ldots$ .

Симметризация и антисимметризация пар индексов:

$$S_{(ij)} = \frac{1}{2}(S_{ij} + S_{ji}); \quad S_{[ij]} = \frac{1}{2}(S_{ij} - S_{ji}).$$

Исключение индекса из симметризации или антисимметризации:

$$S_{(i|j|k)} = \frac{1}{2}(S_{ijk} + S_{kji}); \quad S_{[i|j|k]} = \frac{1}{2}(S_{ijk} - S_{kji}).$$

Переход к локальным (тетрадным) индексам: $S^a{}_{bc} = e^a{}_i S^i{}_{jk} e^j{}_b e^k{}_c$. Внешнее произведение: $e^a \wedge e^c = a^a e^c - e^c e^a$.

Дуальный тензор: $\overset{*}{S}_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijkm} S^{km}$.

Псевдотензор Леви–Чивита: $\varepsilon_{ijkm}$.

Матричная запись тензорных величин: $S^a{}_{bk}$ или, опуская матричные индексы $a$ и $b$, $S^a{}_{bk} \to S_k$; спин-тензорных: $S^{A\dot{B}}{}_{C\dot{D}k} \to S_k$.

Матричное произведение: $[T_m, T_k] = T_m T_k - T_k T_m$. Эрмитово сопряженные матрицы: $S^+{}_{B\dot{D}kn}$.

## Производные

Частные производные по трансляционным координатам $x^i$ обозначены запятой перед индексом, т.е. $f_{,k} = \partial f / \partial x^k = \partial_k f$; ковариантная производная относительно символов Кристоффеля $\Gamma^i{}_{jk}$ обозначается как $\nabla_k$ или $\nabla_k u^i = \partial_k u^i + \Gamma^i{}_{jk} u^j$.

Локальная ковариантная производная: $\nabla_a u^b = \partial_a u^b + \Gamma^b{}_{ca} u^c$.

Ковариантная производная относительно связности $\Delta^i{}_{jk} = e^i{}_a e^a{}_{j,k}$ геометрии $A_4$: $\overset{*}{\nabla}_k u^i = \partial_k u^i + \Delta^i{}_{jk} u^j$.

Внешняя производная: $d$.

Спинорная производная: $\partial_{A\dot{B}}$.

## Трансляционная метрика и тетрады

Трансляционные координаты: $x^0, x^1, x^2, x^3$.

Сигнатура метрики: $(+ - - -)$.

Трансляционный линейный элемент:
$ds^2 = \eta_{ab} e^a{}_i e^b{}_j dx^i dx^j$, $\eta_{ab} = \eta^{ab} = \mathrm{diag}(1 -1 -1 -1)$.

Структурные уравнения группы трансляций геометрии $A_4$:
$\nabla_{[a} \nabla_{b]} x^i = -\Omega_{ab}{}^{\cdot\cdot c} \nabla_c x^i$.

1-форма тетрады: $e^a = e^a{}_i dx^i$.

## Вращательная метрика и кручение

Вращательные координаты: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$.

Вращательная метрика: $d\tau^2 = d\chi^b{}_a d\chi^a{}_b = T^a{}_{bi} T^b{}_{aj} dx^i dx^j$,
$d\chi_{ab} = -d\chi_{ab}$.

Кручение геометрии $A_4$:$\Omega_{jk}{}^{\cdot\cdot i} = e^i{}_a e^a{}_{[k,j]} = \frac{1}{2} e^i{}_a (e^a{}_{k,j} - e^a{}_{j,k})$.

Тензор конторсии геометрии $A_4$ (коэффициенты вращения Риччи):

$$T^i{}_{jk} = -\Omega_{jk}{}^{\cdot\cdot i} + g^{im}(g_{js}\Omega_{mk}{}^{\cdot\cdot s} + g_{ks}\Omega_{mj}{}^{\cdot\cdot s}) = e^i{}_a \nabla_k e^a{}_j.$$

1-форма конторсии: $T^a{}_b = T^a{}_{bk} dx^k = T^a{}_{bc} e^c$, $T_{(ab)} = 0$.

Структурные уравнения группы вращений (матричные индексы опущены): $\nabla_{[k} \nabla_{m]} e^i = \frac{1}{2} R_{km} e^i$, где $R_{km} = 2\nabla_{[m} T_{k]} + [T_m, T_k]$ .

## Связность и кривизна геометрии $A_4$

Связность: $\Delta^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk} + T^i{}_{jk} = e^i{}_a e^a{}_{j,k}$;

$$\Delta^i_{[jk]} = T^i_{[jk]} = -\Omega_{jk}{}^{\cdot\cdot i}; \quad \Delta^i_{(jk)} = \Gamma^i{}_{jk} + g^{im}(g_{js}\Omega_{mk}{}^{\cdot\cdot s} + g_{ks}\Omega_{mj}{}^{\cdot\cdot s}).$$

Кривизна:

$$S^i{}_{jkm} = 2\Delta^i_{j[m,k]} + 2\Delta^i_{s[k}\Delta^s_{|j|m]} =$$

$$= R^i_{jkm} + 2\nabla_{[k} T^i_{|j|m]} + 2T^i_{c[k} T^c_{|j|m]} = 0,$$

где $R^i{}_{jkm} = 2\Gamma^i_{j[m,k]} + 2\Gamma^i_{s[k}\Gamma^s_{|j|m]}$ – тензор Римана.

1–форма связности: $\Delta^a{}_b = \Delta^a{}_{bk} dx^k = \Delta^a{}_{bc} e^c$.

Структурные уравнения Картана:

1) $de^a - e^c \wedge T^a_{\ c} = 0$;

2) $R^a_{\ b} + dT^a_{\ b} + T^c_{\ b} \wedge T^a_{\ c} = 0$.

Тождества Бианки:

1) $R^a{}_{cfd} e^c \wedge e^f \wedge e^d = 0$;

2) $dR^a{}_b + R^f{}_b \wedge T^a{}_f - T^f_{\ b} \wedge R^a{}_f = 0$.

## Спинорный Δ-базис

Символы Ньюмена–Пенроуза: $\sigma_i^{A\dot{B}}$.

Трансляционная метрика: $g_{ij} = \varepsilon_{AC}\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}\sigma_i^{A\dot{B}}\sigma_j^{C\dot{D}}$, где $\varepsilon^{AB}$ – фундаментальный спинор

$$\varepsilon^{AB} = \varepsilon_{AB} = \varepsilon^{\dot{C}\dot{D}} = \varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты вращения Риччи: $T_{A\dot{B}C\dot{D}k} = \sigma^i_{C\dot{D}}\nabla_k\sigma_{A\dot{B}i}$.

Коэффициенты вращения Риччи в матрицах Кармели: $T_{A\dot{B}}$ с матричными элементами $(T_{A\dot{B}})^D{}_C$.

Риманова кривизна в матрицах Кармели: $R_{A\dot{B}C\dot{D}}$.

## Уравнения физического вакуума

В векторном базисе:

$$\nabla_{[k}e^a{}_{m]} - e^b{}_{[k}T^a{}_{|b|m]} = 0, \tag{а}$$

$$R^a{}_{bkm} + 2\nabla_{[k}T^a{}_{|b|m]} + 2T^a{}_{c[k}T^c{}_{|b|m]} = 0. \tag{б}$$

В виде расширенной системы уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса

$$\nabla_{[k}e^a{}_{j]} + T^i{}_{[kj]}e^a{}_i = 0, \tag{а}$$

$$R_{jm} - \frac{1}{2}g_{jm}R = \nu T_{jm}, \tag{$B.1$}$$

$$C^i{}_{jkm} + 2\nabla_{[k}T^i{}_{,|j|m]} + 2T^i{}_{s[k}T^s{}_{,|j|m]} = -\nu J^i{}_{jkm}, \tag{$B.2$}$$

с геометризированными источниками:

$$T_{jm} = -\frac{2}{\nu}\{(\nabla_{[i}T^i{}_{|j|m]} + T^i{}_{s[i}T^s{}_{|j|m]}) - \frac{1}{2}g_{jm}g^{pn}(\nabla_{[i}T^i{}_{|p|n]} + T^i{}_{s[i}T^s{}_{|p|n]})\},$$

$$J_{ijkm} = 2g_{[k(i}T_{j)m]} - \frac{1}{3}T\,g_{i[m}g_{k]j}.$$

В виде обобщенных уравнений Гайзенберга-Эйнштейна-Янга-Миллса:

а) геометризированные уравнения Гайзенберга

$$\nabla_{\beta\dot{\chi}}o_\alpha = \gamma\, o_\alpha o_\beta \bar{o}_{\dot{\chi}} - \alpha\, o_\alpha o_\beta \bar{\iota}_{\dot{\chi}} - \beta\, o_\alpha \iota_\beta \bar{o}_{\dot{\chi}} + \varepsilon\, o_\alpha \iota_\beta \bar{\iota}_{\dot{\chi}} - \tau\, \iota_\alpha o_\beta \bar{o}_{\dot{\chi}} +$$

$$+\rho\, \iota_\alpha o_\beta \bar{\iota}_{\dot{\chi}} + \sigma\, \iota_\alpha \iota_\beta \bar{o}_{\dot{\chi}} - \kappa\, \iota_\alpha \iota_\beta \bar{\iota}_{\dot{\chi}}, \tag{$\overset{+}{A}{}^{s+}.1$}$$

$$\nabla_{\beta\dot{\chi}}\iota_\alpha = \nu\ o_\alpha o_\beta \bar{o}_{\dot{\chi}} - \lambda\ o_\alpha o_\beta \bar{\iota}_{\dot{\chi}} - \mu\ o_\alpha \iota_\beta \bar{o}_{\dot{\chi}} + \pi\ o_\alpha \iota_\beta \bar{\iota}_{\dot{\chi}} - \gamma\ \iota_\alpha o_\beta \bar{o}_{\dot{\chi}} +$$

$$+\alpha\ \iota_\alpha o_\beta \bar{\iota}_{\dot{\chi}} + \beta\ \iota_\alpha \iota_\beta \bar{o}_{\dot{\chi}} - \varepsilon\ \iota_\alpha \iota_\beta \bar{\iota}_{\dot{\chi}}, \qquad (\overset{+}{A}{}^{s+}.2)$$

$$\alpha, \beta ... = 0, 1, \qquad \dot{\chi}, \dot{\mu} ... = \dot{0}, \dot{1};$$

б) геометризированные спинорные уравнения Эйнштейна

$$2\Phi_{AB\dot{C}\dot{D}} + \Lambda\varepsilon_{AB}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} = \nu T_{A\dot{C}B\dot{D}}; \qquad (\overset{+}{B}{}^{s+}.1)$$

в) геометризированные спинорные уравнения Янга–Миллса

$$C_{A\dot{B}C\dot{D}} - \partial_{C\dot{D}} T_{A\dot{B}} + \partial_{A\dot{B}} T_{C\dot{D}} + (T_{C\dot{D}})_A{}^F T_{F\dot{B}} + (T^+{}_{\dot{D}C})^{\dot{F}}{}_{\dot{B}} T_{A\dot{F}} -$$

$$-(T_{A\dot{B}})_C{}^F T_{F\dot{D}} - (T^+{}_{\dot{B}A})^{\dot{F}}{}_{\dot{D}} T_{C\dot{F}} - [T_{A\dot{B}}\ , T_{C\dot{D}}] = -\nu J_{A\dot{B}C\dot{D}}, \qquad (\overset{+}{B}{}^{s+}.2)$$

$$A, C ... = 0, 1, \qquad \dot{B}, \dot{D} ... = \dot{0}, \dot{1}$$

плюс спинорные уравнения для левой материи $\overset{-}{A}{}^{s+}, \overset{-}{B}{}^{s+}$ и для правой и левой антиматерии $\overset{+}{A}{}^{s-}, \overset{+}{B}{}^{s-}$, $\overset{-}{A}{}^{s-}, \overset{-}{B}{}^{s-}$ .

Часть 2

# ГЕОМЕТРИЯ АБСОЛЮТНОГО ПАРАЛЛЕЛИЗМА

## Введение

Геометрия абсолютного параллелизма впервые была рассмотрена в 1923–1924 гг. в работах Р. Вайценбека [1, 2] и Д. Витали [3, 4]. Р. Вайценбек указал на возможность существования на $n$-мерном дифференцируемом многообразии $M$ с координатами $x^1, \dots, x^n$ римановых пространств с тензором Римана–Кристоффеля равным нулю

$$S^i{}_{jkm} = 2\Delta^i_{j[m,k]} + 2\Delta^i_{s[k}\Delta^s_{|j|m]} = 0. \tag{1}$$

Соотношение (1) рассматривалось как условие параллельного переноса произвольного вектора в данном пространстве в абсолютном (не зависящем от выбора пути) смысле. В 1924 г. Д. Витали вводит связность пространства абсолютного параллелизма [3]

$$\Delta^k_{ij} = e^k{}_a e^a{}_{i,j}, \tag{2}$$

$$, j = \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \begin{array}{l} i, j, k \ldots = 0, 1, 2, 3, \\ a, b, c \ldots = 0, 1, 2, 3, \end{array}$$

где $e^k{}_a$ и $e^a{}_i$ – базисные вектора, заданные в каждой точке пространства и переносимые параллельно в абсолютном смысле в любую точку пространства по любому направлению. Р. Вайценбек показал [5], что связность (2) может быть представлена в виде суммы

$$\Delta^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}, \tag{3}$$

где

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im}(g_{jm,k} + g_{km,j} - g_{jk,m}) \tag{4}$$

– символы Кристоффеля, а

$$T^i_{jk} = -\Omega^{..i}_{jk} + g^{im}(g_{js}\Omega^{..s}_{mk} + g_{ks}\Omega^{..s}_{mj}) \tag{5}$$

– коэффициенты вращения Риччи [6] для базиса $e^a{}_i$.

Тензор $\Omega^{..i}_{jk}$, определяемый как

$$\Omega^{..i}_{jk} = e^i{}_a e^a_{[k,j]} = \frac{1}{2} e^i{}_a (e^a{}_{k,j} - e^a{}_{j,k}), \tag{6}$$

получил название объекта неголономности [7], поэтому возникновение геометрии абсолютного параллелизма продолжило развитие неголономной дифференциальной геометрии [8].

Э. Картан и Я. Схоутен [9, 10], исходя из групповых свойств пространства постоянной кривизны, ввели связность (3), в которой компоненты коэффициентов вращения Риччи (5) являются константами.

Суть подхода Э. Картана и Я. Схоутена состоит в следующем. Пусть на $n$-мерном дифференцируемом многообразии $M$ с координатами $x^1, \dots, x^n$ задано поле $n$ контрвариантных векторов

$$\xi^j_a = \xi^j_a(x^k), \tag{7}$$

где

$$a, b, c \dots = 1 \dots n$$

являются векторными индексами, а

$$i, j, k \dots = 1 \dots n$$

– координатными.

Предположим, что

$$\det(\xi^j_a) \neq 0$$

и что функции $\xi^j_a$ удовлетворяют уравнениям

$$\xi^j_a \xi^k{}_{b,j} - \xi^i_b \xi^k{}_{a,i} = -C_{ab}^{\cdot\cdot f} \xi^k_f,$$

в которых константы $C_{ab}^{\cdot\cdot f}$ имеют следующие свойства:

$$C_{ab}^{\cdot\cdot f} = -C_{ba}^{\cdot\cdot f}, \tag{8}$$

$$C_{fb}^{\cdot\cdot a} C_{cd}^{\cdot\cdot f} + C_{fc}^{\cdot\cdot a} C_{db}^{\cdot\cdot f} + C_{fd}^{\cdot\cdot a} C_{bc}^{\cdot\cdot f} = 0. \tag{9}$$

Тогда мы можем сказать, что имеем $n$-параметрическую простую транзитивную группу (группу $T_n$), действующую на многообразии, причем $C_{ab}^{\cdot\cdot f}$ являются структурными константами этой группы, удовлетворяющими тождеству Якоби (9). Векторное поле $\xi^j_b$ называется инфинитезимальными генераторами этой группы.

Пусть теперь базис $e^k_b$, задаваемый в каждой точке многообразия $M$, удовлетворяет усёловию

$$\det(e^j{}_a) \neq 0.$$

Если предположить, что

$$e^j{}_a(x^k_0) = \xi^j_a(x^k_0),$$

где $x^k_0$ являются координатами некоторой произвольной точки $P$, то мы имеем для функций $e^j{}_a(x^k_0)$ уравнения

$$e^j{}_a e^k{}_{b,j} - e^j{}_b e^k{}_{a,j} = -C_{ab}^{\cdot\cdot f} e^k{}_f. \tag{10}$$

В силу условий нормировки базиса

$$e^a{}_i e^j{}_a = \delta^j_i, \quad e^a{}_i e^i{}_b = \delta^a_b \tag{11}$$

из равенства (10) следует

$$C_{jk}^{\cdot\cdot i} = 2e^{i}{}_{a}e^{a}{}_{[k,j]} = e^{i}{}_{a}C^{\cdot\cdot a}_{bc}e_j^b e_k^c. \tag{12}$$

Сравнивая соотношение (12) с (6), мы видим, что

$$\Omega_{jk}^{\cdot\cdot i} = \frac{1}{2}C_{jk}^{\cdot\cdot i},$$

т.е. все компоненты объекта неголономности однородного пространства абсолютного параллелизма постоянны.

Легко видеть, что связность (3) обладает кручением, причем в нашем частном случае

$$\Delta^k_{[ij]} = -\Omega_{ij}^{\cdot\cdot k} = T^k_{[ij]} = -\frac{1}{2}C_{jk}^{\cdot\cdot i}.$$

Именно таким образом Э. Картан и Я. Схоутен ввели связность с кручением [9, 10]. Поэтому геометрия Римана–Картана со связностью

$$\Delta_{ijk} = \Gamma_{ijk} + \frac{1}{2}(C_{ijk} - C_{jki} - C_{kij}), \tag{13}$$

где $S_{ijk} = -\frac{1}{2}C_{ijk}$ – кручение пространства, обязано развитию геометрии абсолютного параллелизма.

Дальнейшее развитие геометрии абсолютного параллелизма на $n$-мерном дифференцируемом многообразии $M$ с координатами $x^1, \ldots,$
$x^n$ (геометрии $A_n$) нашло отображение в работах Е. Бортолотти [11–14], Г. Грисса [15], Я. Схоутена [16, 17], Л. Эйзенхарта [18] и других авторов [19-25]. В частности, Е. Бортолотти [12] первым указал, что связности Картана–Схоутена и Вайценбека–Витали (2) – одно и то же. Кроме того, Е. Бортолотти показал, что тензор (1) можно представить в виде суммы

$$S^{i}{}_{jkm} = R^{i}{}_{jkm} + 2\nabla_{[k}T^{i}{}_{|j|m]} + 2T^{i}{}_{c[k}T^{c}{}_{|j|m]} = 0, \tag{14}$$

где

$$R^{i}{}_{jkm} = 2\Gamma^{i}_{j[m,k]} + 2\Gamma^{i}_{s[k}\Gamma^{s}{}_{|j|m]} \tag{15}$$

– тензор Римана, а величины $T^i_{jk}$ определяются согласно (5).

В 1937 г. в работах Т. Томаса [20, 21] абсолютный параллелизм рассматривается как параллельный перенос векторов в «большом», поскольку связность пространства $A_4$ (так же, как и связность плоского пространства $E_n$) является интегрируемой. Поэтому в пространстве $A_n$ вектор, заданный в какой-либо точке пространства, может быть определен в любой другой точке пространства. Наконец, в работах [23-25] дается классификация пространств с абсолютным параллелизмом.

Геометрия $A_4$ впервые была использована А. Эйнштейном [26] в приложениях к проблемам теоретической физики. Ученый пытался объединить уравнения своей теории с уравнениями электродинамики Максвелла–Лоренца [27]. Попутно отметим, что в рамках геометрии абсолютного параллелизма А. Эйнштейном было написано наибольшее (всего 13) число работ.

Развивая программу А. Эйнштейна по построению единой теории поля, автор пришел к выводу о необходимости использовать геометрию $A_4$ как геометрию пространства событий всеобщей теории относительности и теории физического вакуума [28]. В отличие от А. Эйнштейна и его последователей автор использовал структурные уравнения Картана геометрии абсолютного параллелизма, которые являются обобщением вакуумных уравнений Эйнштейна $R_{ik} = 0$ для случая, когда тензор энергии-импульса в правой части уравнений Эйнштейна имеет геометрическую природу.

Программа единой теории поля, выдвинутая А. Эйнштейном, предполагает решение двух стратегических проблем современной теоретической физики:

а) программа-минимум ставит свой целью геометризацию уравнений электромагнитного поля и объединение их с уравнениями теории гравитации Эйнштейна;

б) программа-максимум направлена на поиски полностью геометризированных уравнений гравитационного и электромагнитного полей (включая источники), т.е. на геометризацию полей, образующих материю.

Несмотря на длительные поиски (около 30 лет), решить эту грандиозную задачу А. Эйнштейну не удалось. Совместно со многими выдающимися учеными того времени он написал большое количество работ, в которых использовались различные геометрии. Однако все они не удовлетворяли требованиям а) и б). Кроме того, не было ясно, каким образом геометризировать спинорные поля (например, поле Дирака), образующие источники электромагнитного поля. Д. Уилер добавил к программе единой теории поля еще один пункт, который требует спинорной формулировки уравнений единого поля. Последнее условие может быть выполнено в том случае, если основные геометрические величины теории являются не тензорами, а спинорами. Спинорное представление классических геометрий, изложенное в работах Р. Пенроуза [29-31], очень помогло мне при построении теории физического вакуума, в которую переросла в настоящий момент эйнштейновская программа единой теории поля.

Математическая часть книги состоит из трех глав. В гл. 6 излагаются основы геометрии $A_4$ в векторном базисе. Вводятся связность и кривизна геометрии абсолютного параллелизма. Даются вывод структурных уравнений Картана геометрии $A_4$

$$\nabla_{[k}e^{a}{}_{m]} - e^{b}{}_{[k}T^{a}{}_{|b|m]} = 0, \qquad (A)$$

$$R^{a}{}_{bkm} + 2\nabla_{[k}T^{a}{}_{|b|m]} + 2T^{a}{}_{c[k}T^{c}{}_{|b|m]} = 0, \qquad (B)$$

$$i, j, k... = 0, 1, 2, 3, \qquad a, b, c... = 0, 1, 2, 3,$$

а также различные варианты их записи, включая запись во внешних дифференциальных формах. Исследуется групповая структура геометрии $A_4$. Устанавливается связь структурных уравнений группы трансляций $T_4$ и группы вращений $O(3.1)$ геометрии $A_4$ со структурными уравнениями Картана. Проведено расщепление структурных уравнений Картана на правые и левые, соответствующие правой и левой геометриям. Дано представление структурных уравнений Картана в виде расширенной полностью геометризированной системы уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса. Получены 10 уравнений движения тетрады: четыре поступательных и шесть вращательных. Введена метрика Киллинга–Картана, действующая на группе вращений $O(3.1)$.

В гл. 7 основные соотношения геометрии абсолютного параллелизма записаны относительно спинорного базиса. Дано спинорное представление структурных уравнений Картана и тождеств Бианки геометрии $A_4$. Введены матрицы Кармели и доказана связь между структурными уравнениями Картана геометрии $A_4$ и уравнениями формализма Ньюмена–Пенроуза. Рассмотрен вариационный принцип для вывода структурных уравнений Картана и вторых тождеств Бианки. Дано разложение спинорных полей геометрии абсолютного параллелизма на неприводимые части, позволяющее представить структурные уравнения Картана в виде расширенной геометризированной системы уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса с калибровочными группами $T_4$ и $SL(2.C)$. Введен формализм двухкомпонентных спиноров Герока–Пенроуза и дана классификация взвешенных спиноров.

В гл. 8 рассмотрен метод конструирования решений структурных уравнений Картана геометрии абсолютного параллелизма на примере геометрий «островного» типа. Дан подробный расчет основных геометрических характеристик геометрии $A_4$ с римановой метрикой типа метрики Шварцшильда. Выписаны решения с римановыми метриками типа метрики Вайдя [32], Ньюмена–Унти–Тамбурино [33], Керра [34], де Ситтера [35] и др. Приведена классификация решений структурных уравнений Картана геометрии $A_4$ по группам изометрий.

# Глава 6

# Геометрия абсолютного параллелизма в векторном базисе

## 6.1 Объект неголономности. Связность абсолютного параллелизма

Рассмотрим четырехмерное дифференцируемое многообразие с координатами $x^i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, причем в каждой точке этого многообразия заданы вектор $e^a{}_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ и ковектор $e^j{}_b$ $(b = 0, 1, 2, 3)$ с условиями нормировки

$$e^a{}_i e^j{}_a = \delta^j_i, \quad e^a{}_i e^i{}_b = \delta^a_b. \tag{6.1}$$

При произвольных преобразованиях координат

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} dx^k \tag{6.2}$$

по координатному индексу $i$ тетрада $e^a{}_i$ преобразуется как вектор

$$e^a{}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} e^a{}_i, \tag{6.3}$$

при этом по тетрадному индексу $a$ относительно преобразований (6.2) она ведет себя как скаляр.

Тетрада $e^a{}_i$ определяет метрический тензор пространства абсолютного параллелизма

$$g_{ik} = \eta_{ab} e^a{}_i e^b_k, \eta_{ab} = \eta^{ab} = \mathrm{diag}(1\ -1\ -1\ -1) \tag{6.4}$$

и риманову метрику

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \tag{6.5}$$

Используя тензор (6.4), можно по обычному правилу [36] построить символы Кристоффеля

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im}(g_{jm,k} + g_{km,j} - g_{jk,m}), \tag{6.6}$$

имеющие нетензорный закон преобразования

$$\Gamma^{k'}_{j'i'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ji} \tag{6.7}$$

относительно координатных преобразований (6.2). В соотношении (6.7) и далее обычную производную по координатам $x^i$ мы будем обозначать как

$$,k = \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{6.8}$$

Дифференцируя произвольный вектор $e^a{}_i$, имеем

$$e^a{}_{i,j'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} e^a{}_{i,j}. \tag{6.9}$$

Применяя операцию дифференцирования к соотношению (6.3), находим

$$e^a_{i',j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} e^a{}_{i,j} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} e^a{}_i. \tag{6.10}$$

Альтернируя индексы $i'$ и $j'$ и вычитая из (6.10) полученное выражение, имеем

$$e^a{}_{i',j'} - e^a{}_{j',i'} = (e^a{}_{i,j} - e^a{}_{j,i}) \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}.$$

Учитывая (6.3), можно переписать это соотношение в виде

$$e^{k'}{}_a (e^a{}_{i',j'} - e^a{}_{j',i'}) = e^k{}_a (e^a{}_{i,j} - e^a{}_{j,i}) \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}.$$

По определению дифференциал

$$ds^a = e^a{}_i dx^i \tag{6.11}$$

является полным, если выполняется соотношение

$$e^a{}_{i,j} - e^a{}_{j,i} = 0. \tag{6.12}$$

В противном случае, когда $e^a{}_{i,j} - e^a{}_{j,i} \neq 0$, дифференциал (6.11) не является интегрируемым, поскольку равенство (6.12) представляет собой условие интегрируемости для соотношения (6.11).

Введем следующий геометрический объект [2]

$$\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk} = e^i{}_a e^a_{[k,j]} = \frac{1}{2} e^i{}_a (e^a{}_{k,j} - e^a{}_{j,k}) \tag{6.13}$$

с тензорным законом преобразования относительно координатных преобразований (6.2)

$$\Omega_{j'k'}^{\cdot\cdot i'} = \Omega_{jk}^{\cdot\cdot i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}. \tag{6.14}$$

Очевидно, что при условии (6.12) этот объект обращается в нуль. В этом случае тетрада $e^a{}_i$ является голономной и метрика (6.5) характеризует голономную дифференциальную геометрию. Если же объект (6.14) отличен от нуля, то мы имеем дело с неголономной дифференциальной геометрией, причем сам объект (6.14) называется объектом неголономности.

Перепишем соотношение (6.10)

$$\begin{aligned} e^a_{i',j'} &= \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} e^a{}_i + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} e^a{}_{i,j} = \\ &= \left( \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Delta^k_{ij} \right) e^a{}_k. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Здесь мы ввели обозначение

$$\Delta^k_{ij} = e^k{}_a e^a{}_{i,j} \tag{6.16}$$

и воспользовались условием ортогональности (6.1).

Из соотношения (6.15 ) видно, что объект $\Delta^k_{ij}$ ведет себя при преобразованиях (6.2) как связность

$$\Delta^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Delta^k_{ij}. \tag{6.17}$$

Связность пространства, определяемая согласно (6.16), называется связностью абсолютного параллелизма [3].

Переставляя в (6.17) индексы $i$ и $j$, имеем

$$\Delta^{k'}_{j'i'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Delta^k_{ji}. \tag{6.18}$$

Вычитая (6.18) из (6.17), находим

$$\Delta^{k'}_{[i'j']} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Delta^k_{[ij]}. \tag{6.19}$$

Из соотношений (6.19) и (6.13) следует, что связность абсолютного параллелизма обладает кручением

$$\Delta^k_{[ij]} = -\Omega_{ij}^{\cdot\cdot k}, \tag{6.20}$$

определяемым объектом неголономности.

## 6.2 Ковариантное дифференцирование в геометрии $A_4$. Коэффициенты вращения Риччи

Определение ковариантной производной относительно связности геометрии абсолютного параллелизма (геометрии $A_4$) $\Delta^i_{jk}$ от тензора произвольной валентности $U^{i\dots p}_{m\dots n}$ имеет вид

$$\overset{*}{\nabla}_k\, U^{i\dots p}_{m\dots n} = U^{i\dots p}_{m\dots n,k} + \Delta^i_{jk} U^{j\dots p}_{m\dots n} + \ldots + \Delta^p_{jk} U^{i\dots j}_{m\dots n} - \tag{6.21}$$

$$-\Delta^j_{mk} U^{i\dots p}_{j\dots n} - \ldots - \Delta^j_{nk} U^{i\dots p}_{m\dots j}.$$

Это определение позволяет доказать некоторые весьма полезные соотношения в геометрии $A_4$.

Параллельный перенос тетрады $e^a{}_i$ относительно связности $\Delta^i_{jk}$ тождественно равен нулю.

*Доказательство.* Из определения (6.21) имеем следующие равенства

$$\overset{*}{\nabla}_k\, e^i{}_a = a^i{}_{a,k} + \Delta^i_{jk} e^j{}_a, \tag{6.22}$$

$$\overset{*}{\nabla}_k\, e^a{}_j = e^a{}_{j,k} - \Delta^i_{jk} e^a{}_i. \tag{6.23}$$

Поскольку связность $\Delta^i_{jk}$ определяется как

$$\Delta^i_{jk} = e^i{}_a e^a{}_{j,k}, \tag{6.24}$$

то

$$e^i{}_a e^a{}_{j,k} - \Delta^i_{jk} = 0.$$

Умножая это равенство на $e^a{}_i$ и учитывая условия ортогональности (6.1), находим

$$\overset{*}{\nabla}_k\, e^a{}_j = e^a{}_{j,k} - \Delta^i_{jk} e^a{}_i = 0. \tag{6.25}$$

Для доказательства равенства нулю соотношения (6.22) возьмем производную от свертки $e^a{}_j e^i{}_a = \delta^i_j$

$$(\delta^i_j)_{,k} = (e^a_j e^i_a)_{,k} = e^i{}_a e^a{}_{j,k} + e^a{}_j e^i_{a,k} = 0,$$

откуда с учетом соотношения (6.24) следует

$$\Delta^i_{jk} = -e^a{}_j e^i{}_{a,k}, \tag{6.26}$$

или

$$e^a{}_j e^i{}_{a,k} + \Delta^i_{jk} = 0.$$

Умножая это соотношение на $e^j{}_a$ и используя условия $e^a{}_j e^i{}_a = \delta^i_j$, получим

$$\overset{*}{\nabla}_k\, e^i{}_a = e^i_{a,k} + \Delta^i_{jk} e^j{}_a = 0. \tag{6.27}$$

Связность $\Delta^i_{jk}$ может быть представлена в виде суммы

$$\Delta^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}, \tag{6.28}$$

где $\Gamma^i_{jk}$ – символы Кристоффеля, определяемые согласно соотношению (6.6), а

$$T^i_{jk} = -\Omega_{jk}^{\cdot\cdot i} + g^{im}(g_{js}\Omega_{mk}^{\cdot\cdot s} + g_{ks}\Omega_{mj}^{\cdot\cdot s}) \tag{6.29}$$

– коэффициенты вращения Риччи [37].

*Доказательство.* Представим связность (6.28) в виде суммы симметричной и антисимметричной по индексам $j, k$ частей

$$\Delta^i_{jk} = \Delta^i_{(jk)} + \Delta^i_{[jk]}, \tag{6.30}$$

где

$$\Delta^i_{(jk)} = \frac{1}{2}(\Delta^i_{jk} + \Delta^i_{kj}), \quad \Delta^i_{[jk]} = \frac{1}{2}(\Delta^i_{jk} - \Delta^i_{jk}).$$

Прибавим и вычтем из правой части (6.30) одно и то же выражение

$$\Delta^i_{jk} = \Delta^i_{(jk)} + \Delta^i_{[jk]} + g^{im}(g_{js}\Delta^s_{[km]} + g_{ks}\Delta^s_{[jm]}) - \tag{6.31}$$

$$- g^{im}(g_{js}\Delta^s_{[km]} + g_{ks}\Delta^s_{[jm]}).$$

Сгруппируем члены в правой части (6.31) следующим образом:

$$\Delta^i_{jk} = \Delta^i_{(jk)} - g^{im}(g_{js}\Delta^s_{[km]} + g_{ks}\Delta^s_{[jm]}) + \tag{6.32}$$

$$+ \Delta^i_{[jk]} + g^{im}(g_{js}\Delta^s_{[km]} + g_{ks}\Delta^s_{[jm]}).$$

Поскольку

$$\Delta^i_{[jk]} = -\Omega_{jk}^{\cdot\cdot i},$$

то из (6.32) и (6.29) следует

$$\Delta^i_{jk} = \Delta^i_{(jk)} - g^{im}(g_{js}\Delta^s_{[km]} + g_{ks}\Delta^s_{[jm]}) + T^i_{jk}. \tag{6.33}$$

Покажем теперь, что

$$\Gamma^i_{jk} = \Delta^i_{(jk)} - g^{im}(g_{js}\Delta^s_{[km]} + g_{ks}\Delta^s_{[jm]}). \tag{6.34}$$

Действительно, имеют место соотношения

$$\Delta^i_{(jk)} = e^i{}_a e^a_{(j,k)} = \frac{1}{2} e^i{}_a (e^a{}_{j,k} + e^a{}_{k,j}),$$

$$\Delta^i_{[jk]} = e^i{}_a e^a_{[j,k]} = \frac{1}{2} e^i{}_a (e^a{}_{j,k} - e^a{}_{k,j}),$$

$$g_{js} = \eta_{ab} e^a{}_j e^b{}_s, \tag{6.35}$$

поэтому (6.34) принимает вид

$$\Gamma^i_{jk} = e^i{}_a e^a_{(j,k)} + g^{im}(\eta_{ab} e^a{}_j e^b_{[m,k]} + \eta_{ab} e^a_k e^b_{[m,j]}) =$$

$$= \frac{1}{2}\eta^{cd}\eta_{ab}e^i_c e^m_d (e^b_m e^a{}_{j,k} + e^b_m e^c{}_{k,j}) +$$

$$+\frac{1}{2} g^{im} \left( \eta_{ab}(e^a{}_j e^b{}_{m,k} - e^a{}_j e^b{}_{k,m}) + \eta_{ab}(e^a_k e^b{}_{m,j} - e^a_k e^b{}_{j,m}) \right).$$

Перегруппировывая члены, имеем

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} \left( (\eta_{ab} e^a{}_j e^b{}_m)_{,k} + (\eta_{ab} e^a_k e^b_m)_{,j} - (\eta_{ab} e^a{}_j e^b{}_k)_{,m} \right),$$

откуда, учитывая соотношение (6.35), получим

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} (g_{jm,k} + g_{km,j} - g_{jk,m}), \tag{6.36}$$

или

$$\frac{1}{2} g^{im} (g_{jm,k} + g_{km,j} - g_{jk,m}) = \tag{6.37}$$

$$= \Delta^i_{(jk)} - g^{im} (g_{js} \Delta^s_{[km]} + g_{ks} \Delta^s_{[jm]}) = \Gamma^i_{jk}.$$

Подставляя (6.37) в (6.33), получим (6.28).

Коэффициенты вращения Риччи $T^i_{jk}$ могут быть представлены в виде

$$T^i_{jk} = e^i{}_a \nabla_k e^a{}_j, \tag{6.38}$$

$$T^i_{jk} = -e^a{}_j \nabla_k e^i{}_a, \tag{6.39}$$

где через $\nabla_k$ обозначена ковариантная производная относительно символов Кристоффеля $\Gamma^i_{jk}$.

*Доказательство.* Представим в соотношениях (6.25) и (6.27) связность $\Delta^i_{jk}$ в виде суммы (6.28)

$$\overset{*}{\nabla}_k \, e^a{}_j = e^a{}_{j,k} - \Gamma^i_{jk} e^a{}_i - T^i_{jk} e^a{}_i = 0, \tag{6.40}$$

$$\overset{*}{\nabla}_k \, e^i{}_a = e^i_{a,k} + \Gamma^i_{jk} e^j{}_a + T^i_{jk} e^j{}_a = 0 \tag{6.41}$$

Поскольку по определению [36]

$$\nabla_k e^a{}_j = e^a{}_{j,k} - \Gamma^i_{jk} e^a{}_i,$$

$$\nabla_k e^i{}_a = e^i_{a,k} + \Gamma^i_{jk} e^j{}_a,$$

то (6.40) и (6.41) можно записать как

$$\nabla_k e^a{}_j - T^i_{jk} e^a{}_i = 0, \tag{6.42}$$

$$\nabla_k e^i{}_a + T^i_{jk} e^j{}_a = 0. \tag{6.43}$$

Умножая (6.42) на $e^i{}_a$ и (6.43) – соответственно на $e^a{}_j$, получим (после использования условия ортогональности (6.1)) из (6.42), (6.43) соотношения (6.38), (6.39).

Вычислим ковариантную производную $\overset{*}{\nabla}_k$ от метрического тензора $g^{jm}$, зная, что $g^{jm} = \eta^{ab} e^j{}_a e^m_b$

$$\overset{*}{\nabla}_k\, g^{jm} = \overset{*}{\nabla}_k\, \eta^{ab} e^j{}_a e^m_b = \overset{*}{\nabla}_k\, e^j{}_a e^{ma} =$$
$$= e^{ma}\, \overset{*}{\nabla}_k\, e^j{}_a + e^j{}_a\, \overset{*}{\nabla}_k\, e^{ma}.$$

Учитывая (6.25) и (6.27), получим

$$\overset{*}{\nabla}\, g^{jm} = 0. \tag{6.44}$$

С другой стороны, применяя формулу (6.21) к соотношению (6.44), находим

$$\overset{*}{\nabla}_k\, g^{jm} = g^{jm}_{,k} + \Delta^j_{pk} g^{pm} + \Delta^m_{pk} g^{jp} = 0. \tag{6.45}$$

Представляя связность $\Delta^i_{jk}$ в виде суммы (6.28), запишем соотношение (6.45) как

$$\overset{*}{\nabla}_k\, g^{jm} = \nabla_k g^{jm} + T^j_{pk} g^{pm} + T^m_{pk} g^{jp} = 0. \tag{6.46}$$

Поскольку имеет место равенство

$$\nabla_k g^{jm} = g^{jm}_{,k} + \Gamma^j_{pk} g^{pm} + \Gamma^m_{pk} g^{jp} = 0, \tag{6.47}$$

то из (6.46) следует

$$T^j_{pk} g^{pm} + T^m_{pk} g^{jp} = T^{jm}_k + T^{mj}_k = 0.$$

Это равенство устанавливает следующие свойства симметрии у коэффициентов вращения Риччи

$$T_{jmk} = -T_{mjk}, \tag{6.48}$$

поэтому в геометрии $A_4$ коэффициенты вращения Риччи имеют 24 независимые компоненты.

## 6.3 Тензор кривизны пространства $A_4$

Тензор кривизны пространства абсолютного параллелизма $S^i{}_{jkm}$ определяется через связность $\Delta^i_{jk}$ по обычному правилу [18]

$$S^i{}_{jkm} = 2\Delta^i_{j[m,k]} + 2\Delta^i_{s[k}\Delta^s_{|j|m]} = 0, \tag{6.49}$$

где квадратные скобки означают альтернацию по соответствующим индексам, а индекс, заключенный в вертикальные линии, не подлежит альтернации.

Тензор Римана–Кристоффеля пространства со связностью (6.26) тождественно равен нулю.

*Доказательство.* Из соотношения (6.26) имеем

$$e^a{}_{j,k} = \Delta^i_{jk} e^a{}_i. \tag{6.50}$$

Дифференцируя соотношение (6.50) по $m$, находим

$$e^{a}{}_{j,k,m} = (\Delta^{i}_{jk} e^{a}{}_{i}),_{m} = \Delta^{i}_{jk,m} e^{a}{}_{i} + e^{a}_{i,m} \Delta^{i}_{jk} =$$

$$= (\Delta^{i}_{jk,m} + e^{i}{}_{a} e^{a}_{s,m} \Delta^{s}_{jk}) e^{a}{}_{i} = (\Delta^{i}_{jk,m} + \Delta^{i}_{sm} \Delta^{s}_{jk}) e^{a}{}_{i}.$$

Альтернируя это соотношение по индексам $k$ и $m$, получим

$$-2e^{a}_{j,[k,m]} = 2(\Delta^{i}_{j[m,k]} + 2\Delta^{i}_{s[k} \Delta^{s}_{|j|m]}) = S^{i}{}_{jkm} e^{a}{}_{i}. \qquad (6.51)$$

Поскольку операция дифференцирования по индексам $k$ и $m$ симметрична, то

$$e^{a}_{j,[k,m]} = 0.$$

Учитывая это равенство и произвольность $e^{a}{}_{i}$ в соотношении (6.51), получим

$$S^{i}{}_{jkm} = 0. \qquad (6.52)$$

Тензор $S^{i}{}_{jkm}$ может быть представлен в виде суммы

$$S^{i}{}_{jkm} = R^{i}{}_{jkm} + 2\nabla_{[k} T^{i}_{|j|m]} + 2T^{i}_{c[k} T^{c}_{|j|m]} = 0, \qquad (6.53)$$

где

$$R^{i}{}_{jkm} = 2\Gamma^{i}_{j[m,k]} + 2\Gamma^{i}_{s[k} \Gamma^{s}_{|j|m]} \qquad (6.54)$$

– тензор Римана пространства $A_4$.

*Доказательство.* Подставив сумму $\Delta^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk} + T^{i}_{jk}$ в соотношение (6.49), имеем

$$S^{i}{}_{jkm} = 2\Gamma^{i}_{j[m,k]} + 2\Gamma^{i}_{s[k} \Gamma^{s}_{|j|m]} + 2T^{i}_{j[m,k]} + 2T^{i}_{s[k} T^{s}_{|j|m]} + \qquad (6.55)$$

$$+ 2T^{i}_{s[k} \Gamma^{s}_{|j|m]} + 2\Gamma^{i}_{s[k} T^{s}_{|j|m]} = 0.$$

Используя соотношение (6.54), запишем (6.55) в виде

$$S^{i}{}_{jkm} = R^{i}{}_{jkm} + 2T^{i}_{j[m,k]} + 2T^{i}_{s[k} T^{s}_{|j|m]} + \qquad (6.56)$$

$$+ 2\Gamma^{s}_{j[k} T^{i}_{|s|m]} + 2\Gamma^{i}_{s[k} T^{s}_{|j|m]} = 0.$$

Если теперь прибавить к правой части этого соотношения выражение

$$-2\Gamma^{s}_{[km]} T^{i}_{sj} = 0$$

и учесть, что, согласно [36],

$$\nabla_{k} U^{i\ldots p}_{m\ldots n} = U^{i\ldots p}_{m\ldots n,k} + \Gamma^{i}_{jk} U^{j\ldots p}_{m\ldots n} + \ldots + \Gamma^{p}_{jk} U^{i\ldots j}_{m\ldots n} - \qquad (6.57)$$

$$- \Gamma^{j}_{mk} U^{i\ldots p}_{j\ldots n} - \ldots - \Gamma^{j}_{nk} U^{i\ldots p}_{m\ldots j},$$

получим из (6.56) равенство (6.53).

Перепишем соотношение (6.53) в виде

$$R^{i}{}_{jkm} = -2T^{i}_{j[m,k]} - 2T^{i}_{s[k}T^{s}_{|j|m]}. \qquad (6.58)$$

Подставляя сюда равенства (6.38) и (6.39)

$$T^{i}_{jk} = e^{i}{}_{a}\nabla_{k}e^{a}{}_{j}, \quad T^{i}_{jk} = -e^{a}{}_{j}\nabla_{k}e^{i}{}_{a},$$

имеем

$$-2T^{i}_{j[m,k]} = -2e^{i}{}_{a}\nabla_{[k}\nabla_{m]}e^{a}{}_{j} - 2\nabla_{[k}e^{i}_{|a|}\nabla_{m]}e^{a}{}_{j},$$

$$-2T^{i}_{s[k}T^{s}_{|j|m]} = 2e^{a}{}_{s}\nabla_{[k}e^{i}_{|a}e^{s}{}_{a|}\nabla_{m]}e^{a}{}_{j} = 2\nabla_{[k}e^{i}_{|a|}\nabla_{m]}e^{a}{}_{j},$$

поэтому из соотношения (6.58) следует

$$R^{i}{}_{jkm} = -2e^{i}{}_{a}\nabla_{[k}\nabla_{m]}e^{a}{}_{j} = 2e^{i}{}_{a}\nabla_{[m}\nabla_{k]}e^{a}{}_{j}. \qquad (6.59)$$

Поле кручения $\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk}$ пространства $A_4$ удовлетворяет уравнениям

$$\overset{*}{\nabla}_{[k}\,\Omega^{\cdot\cdot i}_{jm]} + 2\Omega^{\cdot\cdot s}_{[kj}\Omega^{\cdot\cdot i}_{m]s} = 0. \qquad (6.60)$$

*Доказательство.* Альтернируя выражение (6.49) по индексам $j,k,m$ и учитывая соотношение $\Delta^{i}_{[jk]} = -\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk}$, имеем

$$S^{i}_{[jkm]} = 2\Omega^{\cdot\cdot i}_{[jm,k]} + 2\Delta^{i}_{s[k}\Omega^{\cdot\cdot s}_{jm]} = 0. \qquad (6.61)$$

Прибавляя и вычитая из этого выражения величину

$$2\Delta^{s}_{[kj}\Omega^{\cdot\cdot i}_{|s|m]} + 2\Delta^{s}_{[km}\Omega^{\cdot\cdot i}_{j]s},$$

получим

$$2\Omega^{\cdot\cdot i}_{[jm,k]} + 2\Delta^{i}_{s[k}\Omega^{\cdot\cdot s}_{jm]} - 2\Delta^{s}_{[kj}\Omega^{\cdot\cdot i}_{|s|m]} - 2\Delta^{s}_{[km}\Omega^{\cdot\cdot i}_{j]s} +$$
$$+2\Delta^{s}_{[kj}\Omega^{\cdot\cdot i}_{|s|m]} + 2\Delta^{s}_{[km}\Omega^{\cdot\cdot i}_{j]s} = 0.$$

Используя формулу (6.21), это соотношение можно переписать как

$$2\,\overset{*}{\nabla}_{[k}\,\Omega^{\cdot\cdot i}_{jm]} - 2\Omega^{\cdot\cdot s}_{[kj}\Omega^{\cdot\cdot i}_{|s|m]} - 2\Omega^{\cdot\cdot s}_{[km}\Omega^{\cdot\cdot i}_{j]s} = \qquad (6.62)$$

$$= 2\,\overset{*}{\nabla}_{[k}\,\Omega^{\cdot\cdot i}_{jm]} + 4\Omega^{\cdot\cdot s}_{[kj}\Omega^{\cdot\cdot i}_{m]s} = 0,$$

откуда следует (6.60).

Тензор Римана $R^{i}{}_{jkm}$ пространства $A_4$ удовлетворяет равенству

$$R^{i}_{[jkm]} = 0. \qquad (6.63)$$

*Доказательство.* Альтернируя соотношение (6.54) по индексам $j,k,m$ и используя равенство

$$T^{i}_{[jk]} = -\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk},$$

имеем

$$R^{i}_{[jkm]} = 2\nabla_{[k}\Omega_{jm]}^{\cdot\cdot i} + 2T_{s[k}^{\cdot i}\Omega_{jm]}^{\cdot\cdot s}.$$

Прибавляя и вычитая из правой части этого равенства величину

$$2T^{s}_{[kj}\Omega_{|s|m]}^{\cdot\cdot i} + 2T^{s}_{[km}\Omega_{j]s}^{\cdot\cdot i},$$

получим

$$R^{i}_{[jkm]} = 2\nabla_{[k}\Omega_{jm]}^{\cdot\cdot i} + 2T_{s[k}^{\cdot i}\Omega_{jm]}^{\cdot\cdot s} - 2T^{s}_{[kj}\Omega_{|s|m]}^{\cdot\cdot i} - 2T^{s}_{[km}\Omega_{j]s}^{\cdot\cdot i} +$$

$$+2T^{s}_{[kj}\Omega_{|s|m]}^{\cdot\cdot i} + 2T^{s}_{[km}\Omega_{j]s}^{\cdot\cdot i} = 2\overset{*}{\nabla}_{[k}\Omega_{jm]}^{\cdot\cdot i} - 2\Omega_{[kj}^{\cdot\cdot s}\Omega_{|s|m]}^{\cdot\cdot i} -$$

$$-2\Omega_{[km}^{\cdot\cdot s}\Omega_{j]s}^{\cdot\cdot i} = 2\overset{*}{\nabla}_{[k}\Omega_{jm]}^{\cdot\cdot i} + 4\Omega_{[kj}^{\cdot\cdot s}\Omega_{m]s}^{\cdot\cdot i} = 0,$$

что и доказывает справедливость сотношения (6.63).

## 6.4 Формализм внешних форм и матричная форма структурных уравнений Картана геометрии абсолютного параллелизма

Рассмотрим дифференциалы

$$dx^i = e^a e^i{}_a, \tag{6.64}$$

$$de^i{}_b = \Delta^a{}_b e^i{}_a, \tag{6.65}$$

где

$$e^a = e^a_i dx^i, \tag{6.66}$$

$$\Delta^a{}_b = e^a{}_i de^i{}_b = \Delta^a{}_{bk} dx^k \tag{6.67}$$

– дифференциальные 1-формы тетрады $e^a{}_i$ и связности абсолютного параллелизма $\Delta^a{}_{bk}$. Дифференцируя соотношения (6.64), (6.65) внешним образом [38], имеем соответственно

$$d(dx^i) = (de^a - e^c \wedge \Delta^a{}_c)e^i{}_a = -S^a e^i{}_a, \tag{6.68}$$

$$d(de^i{}_a) = (d\Delta^b{}_a - \Delta^c{}_a \wedge \Delta^b{}_c)e^i{}_b = -S^b{}_a e^i{}_b. \tag{6.69}$$

Здесь через $S^a$ обозначена 2-форма картановского кручения [4], а через $S^b{}_a$ – 2-форма тензора кривизны. Знак $\wedge$ означает внешнее произведение, например

$$e^a \wedge e^b = e^a e^b - e^b e^a. \tag{6.70}$$

По определению пространство обладает геометрией абсолютного параллелизма, если 2-форма картановского кручения $S^a$ и 2-форма кривизны Римана–Кристоффеля $S^b{}_a$ этого пространства обращается в нуль

$$S^a = 0, \tag{6.71}$$

$$S^b{}_a = 0. \tag{6.72}$$

Одновременно эти равенства являются условиями интегрируемости дифференциалов (6.64), (6.65).

Уравнения

$$de^a - e^c \wedge \Delta^a{}_c = -S^a, \tag{6.73}$$

$$d\Delta^b{}_a - \Delta^c{}_a \wedge \Delta^b{}_c = -S^b{}_a, \tag{6.74}$$

следующие из соотношений (6.68), (6.69), представляют собой структурные уравнения Картана соответствующей геометрии. Для геометрии абсолютного параллелизма справедливы условия (6.71), (6.72), поэтому структурные уравнения Картана геометрии $A_4$ имеют следующий вид

$$de^a - e^c \wedge \Delta^a{}_c = 0, \tag{6.75}$$

$$d\Delta^b{}_a - \Delta^c{}_a \wedge \Delta^b{}_c = 0. \tag{6.76}$$

Учитывая соотношение (6.28), представим 1-форму $\Delta^a{}_b$ в виде суммы

$$\Delta^a{}_b = \Gamma^a{}_b + T^a{}_b. \tag{6.77}$$

Подставляя это соотношение в (6.75) и замечая, что

$$e^c \wedge \Delta^a{}_c = e^c \wedge T^a{}_c,$$

получаем первое структурное уравнение Картана пространства $A_4$.

$$de^a - e^c \wedge T^a{}_c = 0. \tag{A}$$

После подстановки равенства (6.77) в (6.76), получаем второе структурное уравнение Картана пространства $A_4$.

$$R^a_b + dT^a{}_b - T^c{}_b \wedge T^a{}_c = 0, \tag{B}$$

где $R^a{}_b$ – 2-форма тензора Римана

$$R^a{}_b = d\Gamma^a{}_b - \Gamma^c{}_b \wedge \Gamma^a{}_c. \tag{6.78}$$

По определению [38] всегда имеют место соотношения

$$dd(dx^i) = 0, \tag{6.79}$$

$$dd(de^i{}_a) = 0. \tag{6.80}$$

В геометрии абсолютного параллелизма эти равенства запишутся как

$$d(de^a - e^c \wedge T^a{}_c) = R^a{}_{cfd} e^c \wedge e^f \wedge e^d = 0, \tag{6.81}$$

$$d(R^a{}_b + dT^a{}_b - T^c{}_b \wedge T^a{}_c) = dR^a{}_b + R^f{}_b \wedge T^a{}_f - T^f{}_b \wedge R^a{}_f = 0. \tag{6.82}$$

Здесь

$$R^a{}_{cfd} = -2T^a{}_{c[d,f]} - 2T^a{}_{b[f}T^b{}_{|c|d]}.$$

Равенства (6.81), (6.82) представляют собой соответственно первое и второе тождества Бианки пространства $A_4$. Опуская индексы, структурные уравнения Картана и тождества Бианки геометрии $A_4$ можно записать как

$$de - e \wedge T = 0, \tag{A}$$

$$R + dT - T \wedge T = 0, \tag{B}$$

$$R \wedge e \wedge e \wedge e = 0, \tag{C}$$

$$dR + R \wedge T - T \wedge R = 0. \tag{D}$$

Матричная запись первых структурных уравнений Картана $(A)$ геометрии $A_4$ имеет вид

$$\nabla_{[k} e^a{}_{m]} - e^b{}_{[k} T^a{}_{|b|m]} = 0. \tag{6.83}$$

*Доказательство.* Запишем уравнения $(A)$ как

$$de^a - e^c \wedge T^a_{\ c} = 0. \tag{6.84}$$

Далее, учитывая (6.66), имеем

$$de^a = d(e^a_{\ m}dx^m) = \nabla_k e^a_{\ m} dx^k \wedge dx^m = \frac{1}{2}(\nabla_k e^a_{\ m} - \nabla_m e^a_{\ k})dx^k \wedge dx^m$$

и, кроме того,

$$e^b \wedge T^a_{\ b} = e^b_{\ k} T^a_{\ bm} dx^k \wedge dx^m = \frac{1}{2}(e^b_{\ k} T^a_{\ bm} - e^b_{\ m} T^a_{\ bk})dx^k \wedge dx^m.$$

Подставляя эти соотношения в уравнения (6.84), получим матричные уравнения в виде

$$\nabla_{[k} e^a_{\ m]} - e^b_{\ [k} T^a_{\ |b|m]} = 0, \tag{A}$$

где матрицы $e^a_{\ m}$ и $T^a_{\ bm}$ по мировым индексам $i, j, m, \ldots$ преобразуются как вектора

$$e^a_{\ m'} = \frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}} e^a_{\ m}, \tag{6.85}$$

$$T^a_{\ bm'} = \frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}} T^a_{\ bm}, \tag{6.86}$$

а по матричным индексам $a, b, c, \ldots$ имеют следующие законы преобразования:

$$e^{a'}_{\ m} = \Lambda_a^{\ a'} e^a_{\ m}, \tag{6.87}$$

$$T^{a'}_{\ b'k} = \Lambda_a^{\ a'} T^a_{\ bk} \Lambda^b_{\ b'} + \Lambda^{a'}_{\ a} \Lambda^a_{\ b',k}. \tag{6.88}$$

В соотношениях (6.85), (6.86) матрицы $\partial x^{m'}/\partial x^m$ образуют группу трансляций $T_4$, действующую на многообразии мировых координат $x^i$. С другой стороны, матрицы $\Lambda^{a'}_{\ a}$ образуют группу четырехмерных вращений $O(3.1)$

$$\Lambda_a^{a'} \in O(3.1),$$

действующую на многообразии «угловых координат» $e^a_{\ i}$. Действительно, тетрада $e^a_{\ i}$ является фактически математическим образом произвольно ускоренной четырехмерной системы отсчета. Такая система отсчета имеет 10 степеней свободы: четыре трансляционные, связанные с движением ее начала, и шесть угловых, описывающих изменение ее ориентации. Шесть независимых компонент тетрады $e^a_{\ i}$ представляют собой шесть направляющих косинусов шести независимых углов, определяющих ориентацию тетрады в пространстве.

Матричная запись вторых структурных уравнений Картана $(B)$ геометрии $A_4$ имеет вид

$$R^a_{\ bkm} + 2\nabla_{[k} T^a_{|b|m]} + 2T^a_{\ c[k} T^c_{\ |b|m]} = 0. \tag{6.89}$$

*Доказательство.* Распишем 2–форму $R^a{}_d$ в виде

$$R^a{}_b = \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}e^c \wedge e^d = \frac{1}{2}R^a{}_{bkm}dx^k \wedge dx^m\,. \tag{6.90}$$

Далее имеем

$$dT^a{}_b = d(T^a{}_{bm}dx^m) = \nabla_k T^a{}_{bm}dx^k \wedge dx^m = \tag{6.91}$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla_k T^a{}_{bm} - \nabla_m T^a{}_{bk})dx^k \wedge dx^m\,,$$

а также

$$T^a{}_c \wedge T^c{}_b = T^a{}_{ck}T^c{}_{bm}dx^k \wedge dx^m = \tag{6.92}$$

$$= \frac{1}{2}(T^a{}_{ck}T^c{}_{bm} - T^c{}_{bm}T^a{}_{ck})dx^k \wedge dx^m\,.$$

Подставим соотношения (6.92)–(6.94) в уравнения

$$R^a{}_b + dT^a{}_b - T^c{}_b \wedge T^a{}_c = 0.$$

После простых преобразований получим

$$\frac{1}{2}(R^a{}_{bkm} + \nabla_k T^a{}_{bm} - \nabla_m T^a{}_{bk} + T^a{}_{ck}T^c{}_{bm} - T^c{}_{bm}T^a{}_{ck})dx^k \wedge dx^m = 0.$$

Поскольку в этом соотношении сомножитель $dx^k \wedge dx^m$ произволен, то

$$R^a{}_{bkm} + \nabla_k T^a{}_{bm} - \nabla_m T^a{}_{bk} + T^a{}_{ck}T^c{}_{bm} - T^c{}_{bm}T^a{}_{ck} = 0,$$

что эквивалентно уравнениям (6.89).

Матричная запись тождества Бианки $(D)$ геометрии $A_4$ имеет вид

$$\nabla_{[n}R^a{}_{|b|km]} + R^c{}_{b[km}T^a{}_{|c|n]} - T^c{}_{b[n}R^a{}_{|c|km]} = 0. \tag{6.93}$$

*Доказательство.* Внешний дифференциал $dR^a{}_b$ в тождествах $(D)$ образует 2–форму

$$dR^a{}_b = \frac{1}{2}\nabla_n R^a{}_{bkm}dx^n \wedge dx^k \wedge dx^m = \tag{6.94}$$

$$= \frac{1}{6}(\nabla_n R^a{}_{bkm} + \nabla_m R^a{}_{bkn} + \nabla_k R^a{}_{bmn})dx^n \wedge dx^k \wedge dx^m\,.$$

Кроме того, мы имеем

$$R^f{}_b \wedge T^a{}_f = \frac{1}{2}R^f{}_{bkm}T^a{}_{fn}dx^k \wedge dx^m \wedge dx^n = \tag{6.95}$$

$$= \frac{1}{6}(R^f{}_{bkm}T^a{}_{fn} + R^f{}_{bnk}T^a{}_{fm} + R^f{}_{bmn}T^a{}_{fk})dx^k \wedge dx^m \wedge dx^n\,,$$

$$T^f{}_b \wedge R^a{}_f = \frac{1}{2}T^f{}_{bn}R^a{}_{fkm}dx^n \wedge dx^k \wedge dx^m = \tag{6.96}$$

$$= \frac{1}{6}(T^{f}_{\ bn} R^{a}_{\ fkm} + T^{f}_{\ bm} R^{a}_{\ fnk} + T^{f}_{\ bk} R^{a}_{\ fmn}) dx^{n} \wedge dx^{k} \wedge dx^{m}.$$

Подставляя соотношения (6.94)–(6.96) в тождество

$$dR^{a}_{\ b} + R^{f}_{\ b} \wedge T^{a}_{\ f} - T^{f}_{\ b} \wedge R^{a}_{\ f} = 0$$

и учитывая произвольность $dx^n \wedge d^k \wedge dx^m$, получим

$$\nabla_n R^{a}_{\ bkm} + \nabla_m R^{a}_{\ bkn} + \nabla_k R^{a}_{\ bmn} + R^{f}_{\ bkm} T^{a}_{\ fn} + R^{f}_{\ bnk} T^{a}_{\ fm} +$$
$$+ R^{f}_{\ bmn} T^{a}_{\ fk} - T^{f}_{\ bn} R^{a}_{\ fkm} - T^{f}_{\ bm} R^{a}_{\ fnk} - T^{f}_{\ bk} R^{a}_{\ fmn} = 0,$$

что эквивалентно тождеству (6.93).

Первое тождество Бианки ($C$) геометрии $A_4$ в индексах группы $O(3.1)$ записывается в виде

$$R^{a}_{\ [bcd]} = 0, \tag{6.97}$$

или, что эквивалентно, как

$$\overset{*}{\nabla}_{[b} \Omega^{\cdot\cdot a}_{cd]} + 2\Omega^{\cdot\cdot f}_{[bc} \Omega^{\cdot\cdot a}_{d]f} = 0. \tag{6.98}$$

## 6.5 Геометрия $A_4$ как групповое многообразие. Метрика Киллинга–Картана

Матричное представление структурных уравнений Картана геометрии абсолютного параллелизма показывает, что на самом деле это пространство проявляет себя как многообразие, на котором действуют группа трансляций $T_4$ и группа вращений $O(3.1)$. Будем рассматривать геометрию $A_4$ как групповое десятимерное многообразие, образованное четырьмя поступательными координатами $x_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$) и шестью (в силу соотношения $e^{a}_{\ i} e^{j}_{\ a} = \delta_i^{\ j}$) «угловыми координатами» $e^{a}_{\ i}$ ($a = 0, 1, 2, 3$). Пусть на этом многообразии действуют группы четырехмерных трансляций $T_4$ и вращений $O(3.1)$. Введем инвариантную производную Хаяши [39]

$$\nabla_b = e^{k}_{\ b} \partial_k, \tag{6.99}$$

компоненты которой представляют собой генераторы группы трансляций $T_4$, действующей на многообразии трансляционных координат $x_i$.

Если представить тетраду в виде суммы

$$e^{k}_{\ b} = \delta^{k}_{\ b} + a^{k}_{\ b}, \tag{6.100}$$

$$i, j, k \ldots = 0, 1, 2, 3, \quad a, b, c, \ldots = 0, 1, 2, 3,$$

то поле $a^{k}_{\ b}$ можно рассматривать как потенциал калибровочного поля группы трансляций $T_4$ [39]. В том случае, когда $a^{k}_{\ b} = 0$, генераторы (6.99) совпадают с генераторами группы трансляций псевдоевклидова пространства $E_4$.

Мы уже знаем, что по координатному индексу $k$ неголономная тетрада $e^k{}_a$ преобразуется как вектор

$$e^{k'}{}_a = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} e^k{}_a,$$

откуда с учетом (6.100) следует закон преобразования поля $a^k{}_a$ относительно трансляций

$$a^{k'}_b = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^n} a^n{}_b + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^n} \delta^n_b - \delta^{k'}_b. \tag{6.101}$$

Определим тетраду $e^i{}_a$ в виде

$$e^i{}_a = \nabla_a x^i \tag{6.102}$$

и запишем коммутационные соотношения для генераторов (6.99) как

$$\nabla_{[a}\nabla_{b]} = -\Omega^{..c}_{ab}\nabla_c, \tag{6.103}$$

где $-\Omega^{..c}_{ab}$ – структурные функции группы трансляций пространства $A_4$, тогда, действуя оператором (6.103) на многообразие $x^i$, получим структурные уравнения группы $T_4$ пространства $A_4$ в виде

$$\nabla_{[a}\nabla_{b]}x^i = -\Omega^{..c}_{ab}\nabla_c x^i, \tag{6.104}$$

или

$$\nabla_{[a}e^i{}_{b]} = -\Omega^{..c}_{ab}e^i{}_c. \tag{6.105}$$

В этом соотношении структурные функции $-\Omega^{..c}_{ab}$ определяются как

$$-\Omega^{..c}_{ab} = e^c{}_i\nabla_{[a}e^i{}_{b]}. \tag{6.106}$$

Из этого равенства видно, что когда потенциалы калибровочного поля группы трансляций $a^k{}_b$ в соотношении (6.100) обращаются в нуль, то в нуль обращаются и структурные функции (6.106). Поэтому поле $\Omega^{..c}_{ab}$ мы будем называть калибровочным полем группы трансляций.

Учитывая, что $T^c{}_{[ab]} = -\Omega^{..c}_{ab}$, перепишем структурные уравнения (6.106) в виде

$$\nabla_{[k}e^a{}_{m]} - e^b{}_{[k}T^a{}_{|b|m]} = 0. \tag{6.107}$$

Легко видеть, что уравнения (6.107) могут быть получены путем альтернации уравнений (6.42). Кроме того, они совпадают с первыми структурными уравнениями Картана (A) геометрии абсолютного параллелизма.

Структурные уравнения группы $T_4$, записанные в виде уравнений (6.106) можно рассматривать как определение для кручения пространства $A_4$. Таким образом, кручение пространства $A_4$ совпадает со структурными функциями группы трансляций этого пространства, при этом структурные функции удовлетворяют обобщенному тождеству Якоби

$$\overset{*}{\nabla}_{[b}\,\Omega^{..a}_{cd]} + 2\Omega^{..f}_{[bc}\Omega^{..a}_{d]f} = 0, \tag{6.108}$$

где $\overset{*}{\nabla}_b$ – ковариантная производная берется относительно связности абсолютного параллелизма $\Delta^a_{bc}$. Сравнивая (6.108) с тождеством Бианки геометрии $A_4$ (6.98), мы видим, что это есть одно и то же. Следовательно, тождество Якоби (6.108), которому удовлетворяют структурные функции группы трансляций геометрии $A_4$, совпадает с первым тождеством Бианки геометрии абсолютного параллелизма.

Вектора

$$e^i{}_a = \nabla_a x^i, \tag{6.109}$$

образующие векторное расслоение [38] геометрии $A_4$, расположены в касательной к каждой точке многообразия $x^i$ псевдоевклидовой плоскости с метрическим тензором

$$\eta_{ab} = \eta^{ab} = \mathrm{diag}(1,\,-1,\,-1,\,-1). \tag{6.110}$$

Поэтому десятимерное многообразие (четыре трансляционные координаты $x^i$ и шесть «вращательных координат» $e^i{}_a$) геометрии абсолютного параллелизма мы можем рассматривать как расслоение с координатами базы $x^i$ и неголономными «координатами» слоя $e^i{}_c$. Если в базе $x^i$ действует группа трансляций $T_4$, то в слое $e^i{}_c$ – группа вращений $O(3.1)$. Из формулы (6.109) бесконечно малые трансляции в базе $x^i$ в направлении $a$ определяются вектором

$$ds^a = e^a{}_i dx^i. \tag{6.111}$$

Образуя из (6.111) и ковариантного вектора $ds_a = e^i{}_a dx_i$ инвариантную свертку $ds^2$, получим метрику Римана пространства $A_4$

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \tag{6.112}$$

с метрическим тензором

$$g_{ik} = \eta_{ab} e^a{}_i e^b{}_k,$$

поэтому риманову метрику (6.112) можно рассматривать как метрику, заданную на группе трансляций $T_4$.

Поскольку в слое мы имеем «угловые координаты» $e^i{}_a$, на многообразии которых действует группа $O(3.1)$, то естественно определить структурные уравнения этой группы, а также метрику, заданную на группе $O(3.1)$.

Перепишем соотношения (6.38), (6.39) в матричной форме

$$T^a{}_{bk} = e^a{}_i T^i{}_{jk} e^j{}_b = \nabla_k e^a{}_j e^j{}_b, \tag{6.113}$$

$$T^a{}_{bk} = e^a{}_i T^i{}_{jk} e^j{}_b = -e^a{}_i \nabla_k e^i{}_b. \tag{6.114}$$

Эти соотношения позволяют установить зависимость между бесконечно малым поворотом $d\chi_{ab} = -d\chi_{ba}$ вектора $e^a{}_i$ при бесконечно малых трансляциях $ds_a$. Действительно, из соотношений (6.113) и (6.114) следует

$$d\chi^a{}_b = T^a{}_{bk} dx^k = De^a{}_j e^j{}_b, \tag{6.115}$$

$$d\chi^a{}_b = T^a{}_{bk}dx^k = -e^a{}_i De^i{}_b. \qquad (6.116)$$

где $D$ – абсолютный дифференциал [36] относительно символов Кристоффеля $\Gamma^i_{jk}$. Образуя с помощью (6.115) инвариантную квадратичную форму $d\tau^2 = d\chi^a{}_b d\chi^b{}_a$, получим метрику Киллинга–Картана

$$d\tau^2 = d\chi^a{}_b d\chi^b{}_a = T^a{}_{bk}T^b{}_{an}dx^k dx^n = -De^a{}_i De^i{}_a \qquad (6.117)$$

с метрическим тензором

$$H_{kn} = T^a{}_{bk}T^b{}_{an}. \qquad (6.118)$$

В отличие от метрики (6.112) метрика (6.117) задана на группе вращений $O(3.1)$, действующей на многообразии «вращательных координат» $e^a{}_i$.

Введем теперь ковариантную производную

$$\overset{*}{\nabla}_m = \nabla_m + T_m, \qquad (6.119)$$

где $T_m$ – матрица $T^a{}_{bm}$, у которой опущены матричные индексы, и будем рассматривать компоненты этой производной как генераторы группы вращений $O(3.1)$. Действуя этим оператором на тетраду $e^i$, образующую многообразие «угловых координат» геометрии $A_4$, имеем

$$\overset{*}{\nabla}_m e^i = \nabla_m e^i + T_m e^i = 0, \qquad (6.120)$$

откуда

$$T_m = -e_i \nabla_m e^i. \qquad (6.121)$$

Интересно отметить, что подобно тому как в соотношении (6.109) мы определили шесть «угловых координат» $e^i{}_a$ через четыре трансляционные координаты $x^i$, так и в соотношении (6.121) можно определить 24 «суперкоординаты» $T^a{}_{bm}$ через шесть координат $e^i{}_a$.

Из равенства (6.120) следует

$$\nabla_m e^i = -T_m e^i. \qquad (6.122)$$

Напомним, что в соотношениях (6.120)–(6.122) через $\nabla_m$ обозначена ковариантная производная относительно $\Gamma^i_{jk}$, и возьмем ковариантную производную $\nabla_k$ от соотношения (6.122)

$$\begin{aligned}\nabla_k\nabla_m e^i = -\nabla_k(T_m e^i) = -(\nabla_k T_m e^i + T_m \nabla_k e^i) = \\ = -(\nabla_k T_m e^i + T_m e^i e_i \nabla_k e^i).\end{aligned}$$

Используя соотношение (6.121), перепишем это выражение как

$$\nabla_k\nabla_m e^i = -(\nabla_k T_m - T_m T_k)e^i.$$

Альтернируя это выражение по индексам $k$ и $m$, имеем

$$\nabla_{[k}\nabla_{m]}e^i = \frac{1}{2}R_{km}e^i, \qquad (6.123)$$

где

$$R_{km} = 2\nabla_{[m}T_{k]} + [T_m, T_k]. \tag{6.124}$$

Вводя в уравнениях (6.124) матричные индексы (индексы слоя), получим структурное уравнение группы $O(3.1)$

$$R^a{}_{bkm} = 2\nabla_{[m}T^a{}_{|b|k]} + 2T^a{}_{c[m}T^c{}_{|b|k]}. \tag{B}$$

Легко видеть, что структурные уравнения группы вращений $(B)$ совпадают со вторыми структурными уравнениями Картана (6.124) геометрии $A_4$.

В данном случае величины $T^a{}_{bk}$ и $R^a{}_{bkm}$ преобразуются в группе вращений $O(3.1)$ по закону

$$T^{a'}{}_{b'k} = \Lambda_a{}^{a'}T^a{}_{bk}\Lambda^b{}_{b'} + \Lambda_a{}^{a'}\Lambda^a{}_{b',k} \tag{6.125}$$

и выступают как потенциалы калибровочного поля $R^a{}_{bkm}$ группы вращений $O(3.1)$. При этом само калибровочное поле группы $O(3.1)$ преобразуется как

$$R^{a'}{}_{b'km} = \Lambda_a{}^{a'}R^a{}_{bkm}\Lambda^b{}_{b'}. \tag{6.126}$$

Заметим, что структурными функциями группы вращений геометрии $A_4$ являются компоненты тензора кривизны $R^a{}_{bkm}$. Можно показать, что структурные функции $R^a{}_{bkm}$ группы вращений $O(3.1)$ удовлетворяют тождествам Якоби

$$\nabla_{[n}R^a{}_{|b|km]} + R^c{}_{b[km}T^a{}_{|c|n]} - T^c{}_{b[n}R^a{}_{|c|km]} = 0, \tag{D}$$

которые, как было показано в предыдущем разделе, являются одновременно вторыми тождествами Бианки пространства $A_4$.

Введем дуальный тензор Римана

$$\overset{*}{R}_{ijkm} = \frac{1}{2}\varepsilon^{sp}{}_{km}R_{ijsp}, \tag{6.127}$$

где $\varepsilon^{sp}{}_{km}$ – полностью антисимметричный тензор Леви–Чивита. Тогда уравнения $(D)$ могут быть записаны в следующем виде

$$\nabla_n \overset{*}{R}{}^a{}_b{}^{kn} + \overset{*}{R}{}^c{}_b{}^{kn}T^a{}_{cn} - T^c{}_{bn}\overset{*}{R}{}^a{}_c{}^{kn} = 0, \tag{6.128}$$

или, опуская матричные индексы, как

$$\nabla_n \overset{*}{R}{}^{kn} + \overset{*}{R}{}^{kn}T_n - T_n\overset{*}{R}{}^{kn} = 0. \tag{6.129}$$

## 6.6 Структурные уравнения геометрии $A_4$ в виде расширенной, полностью геометризированной системы уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса

А. Эйнштейн считал, что одной из основных проблем единой теории поля является проблема геометризации тензора энергии-импульса материи, стоящего в правой части его уравнений. Эту проблему удается решить, если использовать в качестве пространства событий геометрию абсолютного параллелизма и структурные уравнения Картана этой геометрии.

Действительно, свертывая уравнения $(B)$, записанные в виде

$$R^{i}{}_{jkm} + 2\nabla_{[k}T^{i}_{|j|m]} + 2T^{i}_{s[k}T^{s}_{|j|m]} = 0 \tag{6.130}$$

по индексам $i$ и $k$, получим

$$R_{jm} = -2\nabla_{[i}T^{i}_{|j|m]} - 2T^{i}_{s[i}T^{s}_{|j|m]}. \tag{6.131}$$

Свертывая далее уравнения (6.131) с метрическим тензором $g^{jm}$, имеем

$$R = -2g^{jm}(\nabla_{[i}T^{i}_{|j|m]} + T^{i}_{s[i}T^{s}_{|j|m]}). \tag{6.132}$$

Образуя с помощью (6.131) и (6.132) тензор Эйнштейна

$$G_{jm} = R_{jm} - \frac{1}{2}g_{jm}R,$$

получим уравнения

$$R_{jm} - \frac{1}{2}g_{jm}R = \nu T_{jm}, \tag{6.133}$$

подобные уравнениям Эйнштейна, но с геометризированной правой частью, определяемой как

$$T_{jm} = -\frac{2}{\nu}\{(\nabla_{[i}T^{i}{}_{|j|m]} + T^{i}{}_{s[i}T^{s}{}_{|j|m]}) - \\ -\frac{1}{2}g_{jm}g^{pn}(\nabla_{[i}T^{i}{}_{|p|n]} + T^{i}{}_{s[i}T^{s}{}_{|p|n]})\}. \tag{6.134}$$

Введем следующее обозначение

$$P_{jm} = (\nabla_{[i}T^{i}{}_{|j|m]} + T^{i}{}_{s[i}T^{s}{}_{|j|m]}),$$

тогда из равенства (6.134) следует

$$T_{jm} = -\frac{2}{\nu}(P_{jm} - \frac{1}{2}g_{jm}g^{pn}P_{pn}). \tag{6.135}$$

Тензор (6.135) разлагается на симметричную и антисимметричную по индексам $j$ и $m$ части, т.е.

$$T_{jm} = T_{(jm)} + T_{[jm]}. \tag{6.136}$$

Левая часть уравнений (6.133) всегда симметрична по индексам $j$ и $m$, поэтому их можно записать как

$$R_{jm} - \frac{1}{2}g_{jm}R = \nu T_{(jm)}, \tag{6.137}$$

$$T_{[jm]} = \frac{1}{\nu}(-\nabla_i \Omega_{jm}^{\cdot\cdot i} - \nabla_m A_j - A_s \Omega_{jm}^{\cdot\cdot s}) = 0, \tag{6.138}$$

где

$$A_j = T_{ji}^{i}. \tag{6.139}$$

Соотношение (6.138) можно понимать как уравнения, которым удовлетворяют поля кручения $\Omega_{jm}^{\cdot\cdot i}$, образующие тензор энергии-импульса (6.135).

В случае, когда поле $T_{jk}^{i}$ антисимметрично по всем трем индексам, имеем

$$T_{ijk} = -T_{jik} = T_{jki} = -\Omega_{ijk}. \tag{6.140}$$

Для таких полей уравнения (6.138) принимают простой вид, а именно

$$\nabla_i \Omega_{jm}^{\cdot\cdot i} = 0, \tag{6.141}$$

при этом тензор энергии-импульса (6.135) симметричен по индексам $j, m$ и оказывается равным

$$T_{jm} = \frac{1}{\nu}(\Omega_{sm}^{\cdot\cdot i} \Omega_{ji}^{\cdot\cdot s} - \frac{1}{2} g_{jm} \Omega_s^{\cdot ji} \Omega_{ji}^{\cdot\cdot s}). \tag{6.142}$$

В самом деле, из уравнений (6.137) имеем

$$T_{jm} = \frac{1}{\nu}(R_{jm} - \frac{1}{2} g_{jm} R). \tag{6.143}$$

Используя равенства (6.131), (6.140) и (6.142), находим

$$R_{jm} = \Omega_{sm}^{\cdot\cdot i} \Omega_{ji}^{\cdot\cdot s}, \tag{6.144}$$

$$R = g^{jm} \Omega_{sm}^{\cdot\cdot i} \Omega_{ji}^{\cdot\cdot s} = \Omega_s^{\cdot ji} \Omega_{ji}^{\cdot\cdot s}. \tag{6.145}$$

Подставляя соотношения (6.144) и (6.145) в равенство (6.143), получим тензор энергии-импульса (6.142).

Через поле (6.140) можно определить псевдовектор $h_m$ следующим образом

$$\Omega^{ijk} = \varepsilon^{ijkm} h_m, \quad \Omega_{ijk} = \varepsilon_{ijkm} h^m, \tag{6.146}$$

где $\varepsilon_{ijkm}$ – полностью антисимметричный символ Леви–Чивита.

Через псевдовектор $h_m$ тензор (6.142) запишется как

$$T_{jm} = \frac{1}{\nu}(h_j h_m - \frac{1}{2} g_{jm} h^i h_i). \tag{6.147}$$

Подставляя соотношения (6.146) в уравнения (6.141), получим

$$h_{m,j} - h_{j,m} = 0. \tag{6.148}$$

Эти уравнения имеют два решения: тривиальное, когда $h_m = 0$, и

$$h_m = \psi_{,m}, \tag{6.149}$$

где $\Psi$ – псевдоскаляр.

Записывая тензор энергии-импульса (6.147) через этот псевдоскаляр, получим

$$T_{jm} = \frac{1}{\nu}(\psi_{,j}\psi_{,m} - \frac{1}{2}g_{jm}\psi^{,i}\psi_{,i}). \qquad (6.150)$$

Тензор (6.150) представляет собой тензор энергии-импульса псевдоскалярного поля.

Разложим тензор Римана $R_{ijkm}$ на неприводимые части

$$R_{ijkm} = C_{ijkm} + g_{i[k}R_{m]j} + g_{j[k}R_{m]i} + \frac{1}{3}Rg_{i[m}g_{k]j}, \qquad (6.151)$$

где $C_{ijkm}$ – тензор Вейля, второй и третий члены – бесследовая часть тензора Риччи $R_{jm}$ и $R$ – его след. Используя уравнения (6.133), записанные в виде

$$R_{jm} = \nu\left(T_{jm} - \frac{1}{2}g_{jm}T\right), \qquad (6.152)$$

перепишем соотношение (6.151) в виде

$$R_{ijkm} = C_{ijkm} + 2\nu g_{[k(i}T_{j)m]} - \frac{1}{3}\nu T\, g_{i[m}g_{k]j}, \qquad (6.153)$$

где $T$ – след тензора (6.135).

Введем теперь тензорный ток

$$J_{ijkm} = 2g_{[k(i}T_{j)m]} - \frac{1}{3}T\, g_{i[m}g_{k]j} \qquad (6.154)$$

и представим тензор (6.153) в виде суммы

$$R_{ijkm} = C_{ijkm} + \nu J_{ijkm}. \qquad (6.155)$$

Подставляя это соотношение в уравнения (6.130), получим

$$C_{ijkm} + 2\nabla_{[k}T_{|ij|m]} + 2T_{is[k}T^{s}_{|j|m]} = -\nu J_{ijkm}. \qquad (6.156)$$

Уравнения (6.156) представляют собой уравнения Янга–Миллса с геометризированным источником, определяемым согласно соотношению (6.154). В уравнениях (6.156) в качестве поля Янга–Миллса выступает тензор Вейля $C_{ijkm}$, а потенциалами этого поля являются коэффициенты вращения Риччи $T^{i}_{jk}$.

Подставим теперь соотношение (6.155) во вторые тождества Бианки $(D)$

$$\nabla_{[n}R_{|ij|km]} + R^{s}_{j[km}T_{|is|n]} - T^{s}_{j[n}R_{|is|km]} = 0. \qquad (6.157)$$

В результате имеем уравнения движения

$$\nabla_{[n}C_{|ij|km]} + C^{s}_{j[km}T_{|is|n]} - T^{s}_{j[n}C_{|is|km]} = -\nu J_{nijkm} \qquad (6.158)$$

для поля Янга–Миллса $C_{ijkm}$. При этом источник $J_{nijkm}$ в этих уравнениях определяется через ток (6.154) следующим образом:

$$J_{nijkm} = \nabla_{[n} J_{|ij|km]} + J^s_{j[km} T_{|is|n]} - T^s_{j[n} R_{|is|km]}. \qquad (6.159)$$

Используя уравнения (6.133) и (6.156), можно представить структурные уравнения Картана $(A)$ и $(B)$ в виде расширенной геометризированной системы уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса [28]

$$\begin{array}{rr} \nabla_{[k} e^a_{j]} + T^i_{[kj]} e^a{}_i = 0, & (A) \\ R_{jm} - \frac{1}{2} g_{jm} R = \nu T_{jm}, & (B.1) \\ C^i_{jkm} + 2\nabla_{[k} T^i_{|j|m]} + 2T^i_{s[k} T^s_{|j|m]} = -\nu J^i{}_{jkm}, & (B.2) \end{array} \qquad (6.160)$$

в которых источники $T_{jm}$ и $J_{ijkm}$ определяются согласно соотношениям (6.135) и (6.154).

Для случая эйнштейновского вакуума уравнения (6.160) значительно упрощаются и принимают вид

$$\begin{array}{rr} \nabla_{[k} e^a_{j]} + T^i_{[kj]} e^a{}_i = 0, & (i) \\ R_{jm} = 0, & (ii) \\ C^i{}_{jkm} + 2\nabla_{[k} T^i_{|j|m]} + 2T^i_{s[k} T^s_{|j|m]} = 0. & (iii) \end{array} \qquad (6.161)$$

Уравнения движения (6.158) поля Янга–Миллса $C_{ijkm}$ в этом случае запишутся как

$$\nabla_{[n} C_{|ij|km]} + C^s_{j[km} T_{|is|n]} - T^s_{j[n} C_{|is|km]} = 0. \qquad (6.162)$$

Уравнения $(A)$ и $(B.2)$ могут быть записаны в матричном виде

$$\nabla_{[k} e^a{}_{m]} - e^b{}_{[k} T^a{}_{|b|m]} = 0, \qquad (A)$$

$$C^a{}_{bkm} + 2\nabla_{[k} T^a{}_{|b|m]} + 2T^a{}_{f[k} T^f{}_{|b|m]} = -\nu J^a{}_{bkm}, \qquad (B.2)$$

где ток

$$J^a{}_{bkm} = 2g_{[k}{}^{(a} T_{b)m]} - \frac{1}{3} T g^a{}_{[m} g_{k]b} \qquad (6.163)$$

определяется соотношением

$$T^a{}_m = \frac{1}{\nu}(R^a{}_m - \frac{1}{2} g^a{}_m R), \qquad (B.1)$$

$$m = 0,1,2,3, \quad a = 0,1,2,3.$$

Записывая уравнения (6.158) в матричном виде, имеем

$$\nabla_{[n} C^a{}_{|b|km]} + C^c{}_{b[km} T^a{}_{|c|n]} - T^c{}_{b[n} C^a{}_{|a|km]} = -\nu J^a{}_{nbkm}, \qquad (6.164)$$

где

$$J^a{}_{nbkm} = \nabla_{[n} J^a{}_{|b|km]} + J^c{}_{b[km} T^a{}_{|c|n]} - T^c{}_{b[n} J^a{}_{|c|km]}. \qquad (6.165)$$

Опуская матричные индексы в матричных уравнениях, имеем

$$\nabla_{[k}e_{m]} - e_{[k}T_{m]} = 0, \qquad (A)$$

$$C_{km} + 2\nabla_{[k}T_{m]} - [T_k, T_m] = -\nu J_{km}, \qquad (B.2)$$

$$\nabla_n \overset{*}{C}{}^{kn} + [\overset{*}{C}{}^{kn}, T_n] = -\nu \overset{*}{J}{}^{k}, \qquad (D)$$

где дуальные матрицы $\overset{*}{C}{}^{kn}$ и $\overset{*}{J}{}^{k}$ определяются как

$$\overset{*}{C}{}^{kn} = \varepsilon^{knij} C_{ij},$$

$$\overset{*}{J}{}^{nk} = \varepsilon^{nkim} J_{im}, \qquad (6.166)$$

$$\overset{*}{J}{}^{k} = \{\nabla_n \overset{*}{J}{}^{kn} + [\overset{*}{J}{}^{kn}, T_n]\}. \qquad (6.167)$$

В случае эйнштейновского вакуума справедливы соотношения

$$R_{ijkm} = C_{ijkm} = \overset{*}{R}_{ijkm} = C_{ijkm}, \qquad (6.168)$$

поэтому уравнения $(B.2)$ и $(D)$ упрощаются и принимают вид

$$C_{km} + 2\nabla_{[k}T_{m]} - [T_k, T_m] = 0, \qquad (B.2)$$

$$\nabla_n C^{kn} + [C^{kn}, T_n] = 0. \qquad (D)$$

Используя формализм внешних дифференциальных форм, можно записать структурные уравнения $(A)$ и $(B.2)$ как

$$de^a - e^b \wedge T^a{}_b = 0, \qquad (A)$$

$$C^a{}_b + dT^a{}_b - T^a{}_c \wedge T^c{}_b = -\nu J^a{}_b, \qquad (B.2)$$

а уравнения $(D)$ как

$$dC^a{}_b + C^a{}_f \wedge T^f{}_b - T^f{}_b \wedge C^a{}_f = -\nu N^a{}_b, \qquad (D)$$

где

$$N^a{}_b = dJ^a{}_b + J^a{}_f \wedge T^f{}_b - T^f{}_b \wedge J^a{}_f. \qquad (6.169)$$

Таким образом, структурные уравнения геометрии $A_4$, записанные в виде (6.160), представляют собой расширенную систему уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса с калибровочной группой трансляций $T_4$, действующей в базе $x^i$ и имеющей структурные уравнения $(A)$, и с калибровочной группой вращений $O(3.1)$, действующей в слое $e^i{}_a$ и имеющей структурные уравнения в виде геометризированных уравнений $(B.1)$ и $(B.2)$.

## 6.7 Уравнения геодезических пространства $A_4$

Уравнения геодезических геометрии абсолютного параллелизма могут быть получены из условия параллельного переноса вектора

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \qquad (6.170)$$

по связности геометрии $A_4$

$$\Delta^i_{jk} = \Gamma^i_j + T^i_{jk} = e^i{}_a e^a{}_{j,k}. \tag{6.171}$$

Действительно, специализируем тетраду $e^i{}_a$ таким образом, чтобы вектор $e^i{}_0$ совпадал с касательной к мировой линии, т.е.

$$e^i{}_0 = u^i = \frac{dx^i}{ds}. \tag{6.172}$$

Из соотношения (6.27) для вектора (6.172) имеем

$$\overset{*}{\nabla}_k\, u^i = u^i_{,k} + \Delta^i_{jk} u^j = 0, \tag{6.173}$$

или

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} u^j + T^i_{jk} u^j = 0. \tag{6.174}$$

Умножая это соотношение на $u^k = dx^k/ds$, получим

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{jk} u^j u^k + T^i_{jk} u^j u^k = 0, \tag{6.175}$$

или, учитывая равенство (6.170),

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} + T^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{6.176}$$

Эти четыре уравнения ($i = 0, 1, 2, 3$) представляют собой уравнения геодезических пространства $A_4$. Они также являются уравнениями движения начала $O$ тетрады $e^i{}_a$. Поскольку в уравнениях (6.176) коэффициенты вращения Риччи $T^i_{jk}$ имеют как симметричную, так и антисимметричную части по индексам $j$ и $k$

$$\begin{gathered} T^i_{jk} = T^i_{(jk)} + T^i_{[jk]} = \\ = -\Omega^{..i}_{jk} + g^{im}(g_{js}\Omega^{..s}_{mk} + g_{ks}\Omega^{..s}_{mj}), \end{gathered} \tag{6.177}$$

$$T^i_{(jk)} = g^{im}(g_{js}\Omega^{..s}_{mk} + g_{ks}\Omega^{..s}_{mj}), \tag{6.178}$$

$$T^i_{[jk]} = -\Omega^{..i}_{jk}, \tag{6.179}$$

то уравнения (6.176) можно записать как

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} + T^i_{(jk)}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{6.180}$$

Учитывая структуру равенства (6.178), запишем его в виде

$$T^i_{(jk)} = g^{im}(g_{js}\Omega^{..s}_{mk} + g_{ks}\Omega^{..s}_{mj}) = 2g^{im}\Omega_{m(jk)}. \tag{6.181}$$

Следовательно, уравнения геодезических пространства $A_4$ можно представить как

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} + 2g^{im}\Omega_{m(jk)}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{6.182}$$

Для слагаемых в равенстве (6.181) можно ввести следующие обозначения:

$$\Omega^{\cdot i}_{k.j} = g^{im}g_{ks}\Omega^{\cdot\cdot s}_{jm},$$

$$\Omega^{i}_{\cdot jk} = g^{im}g_{ks}\Omega^{\cdot\cdot s}_{mj}.$$

Тогда тензор конторсии $T^i_{jk}$ пространства $A_4$ запишется как

$$T^i_{jk} = -\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk} - \Omega^{\cdot i}_{k.j} + \Omega^{i}_{\cdot jk}, \tag{6.183}$$

причем

$$-\Omega^{\cdot i}_{k.j} = \Omega^{i}_{\cdot jk},$$

поэтому

$$T^i_{jk} = -\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk} + 2\Omega^{i}_{\cdot jk}. \tag{6.184}$$

Ковариантный дифференциал от произвольного вектора $v^i$ относительно связности (6.171) при параллельном переносе из точки $x^i$ в точку $x^i+dx^i$ запишется как

$$\delta v^i = dv^i + \Delta^i_{jk}dx^j = 0. \tag{6.185}$$

Если в произвольной точке $x^i$ пространства $A_4$ мы имеем два линейных элемента $\delta x^i$ и $dx^i$ и производим параллельное смещение $\delta x^i$ вдоль элемента $dx^i$, то для конечной точки смещения получим [37]

$$x^i + dx^i + \delta x^i - \Delta^i_{jk}\delta x^k dx^j = x^i + dx^i + \delta x^i + d\delta x^i. \tag{6.186}$$

С другой стороны, параллельное смещение вектора $dx^i$ вдоль вектора $\delta x^i$ дает

$$x^i + \delta x^i + dx^i - \Delta^i_{jk}dx^k\delta x^j = x^i + \delta x^i + dx^i + \delta dx^i. \tag{6.187}$$

Вычитая из соотношения (6.186) равенство (6.187), имеем

$$\begin{aligned} d\delta x^i - \delta dx^i &= -(\Delta^i_{jk}\delta x^k dx^j + \Delta^i_{jk}dx^k\delta x^j) = \\ &= -(\Delta^i_{jk} - \Delta^i_{kj})\delta x^k dx^j = -2\Delta^i_{[jk]}\delta x^k dx^j = \\ &= 2\Omega^{\cdot\cdot s}_{jk}\delta x^k dx^j = -2\Omega^{\cdot\cdot s}_{jk}\delta x^j dx^k. \end{aligned} \tag{6.188}$$

Рассмотрим теперь вариацию интеграла

$$\int_a^b L(x^i, u^i)ds, \tag{6.189}$$

где $u^i$ определено согласно соотношению (6.170). Запишем равенство (6.188) в виде

$$\delta dx^i = d\delta x^i + 2\Omega_{jk}^{\cdot\cdot s}\delta x^j dx^k. \tag{6.190}$$

Тогда в каждой точке экстремали имеем

$$\delta u^i = \delta\frac{dx^i}{ds} = \frac{d}{ds}\delta x^i + 2\Omega_{jk}^{\cdot\cdot i}\delta x^j\frac{dx^k}{ds}. \tag{6.191}$$

Используя обычную вариационную процедуру для интеграла (6.189), находим

$$\int_a^b \delta L(x^i,u^i)ds =$$
$$= \int_a^b \left(L(x^i+\delta x^i, u^i+\delta u^i) - L(x^i,u^i)\right)ds =$$
$$= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial L}{\partial u^i}\delta u^i\right)ds = 0. \tag{6.192}$$

Подставляя сюда соотношение (6.191), получим

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\partial x^i + \frac{\partial L}{\partial u^i}\frac{d}{ds}\partial x^i + \frac{\partial L}{\partial u^i}2\Omega_{jk}^{\cdot\cdot i}\partial x^j u^k\right)ds = 0.$$

Производя интегрирование второго члена в этом соотношении по частям, находим

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial u^i} + 2\Omega_{ik}^{\cdot\cdot j}\frac{\partial L}{\partial u^j}u^k\right)\partial x^i = 0$$

или ввиду произвольности $\partial x^i$ получим [37]

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} + 2\Omega_{ki}^{\cdot\cdot j}\frac{\partial L}{\partial u^j}u^k = 0. \tag{6.193}$$

Пусть теперь

$$L = (g_{ik}u^i u^k)^{1/2}, \tag{6.194}$$

причем вдоль экстремали $L = 1$ в силу соотношения

$$g_{ik}u^i u^k = u^i u_i = 1.$$

Подставляя лагранжиан (6.194) в уравнения (6.193), получим

$$g_{mi}\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{mjk}u^j u^k + 2\Omega_{mj}^{\cdot\cdot s}g_{sk}u^k u^j = 0. \tag{6.195}$$

Умножая это соотношение на $g^{im}$, находим

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kj}^i u^j u^k + 2g^{im}g_{ks}\Omega_{mj}^{\cdot\cdot s}u^j u^k = 0,$$

или

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kj} u^j u^k + 2g^{im}\Omega_{m(jk)} u^j u^k = 0. \qquad (6.196)$$

Таким образом, мы получили уравнения геодезических из вариационного принципа, записанные в виде уравнений (6.182). Рассмотрим теперь уравнения, которые описывают изменение ориентации тетрады $e^i{}_a$ при движении ее согласно уравнениям геодезических (6.196). Для этого перепишем уравнения (6.43) в виде

$$\partial_k e^i{}_a + \Delta^i_{jk} e^j{}_a = 0,$$

или как

$$de^i{}_a + \Delta^i_{jk} e^j{}_a dx^k = 0. \qquad (6.197)$$

Поделив эти уравнения на $ds$, получим

$$\frac{de^i{}_a}{ds} + \Delta^i_{jk} e^j{}_a \frac{dx^k}{ds} = 0. \qquad (6.198)$$

Далее, вычисляя вторую производную $d^2 e^i{}_a / ds^2$, имеем

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{de^i{}_a}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial e^i{}_a}{\partial x^k}\frac{dx^k}{ds}\right) = \frac{\partial^2 e^i{}_a}{\partial x^m \partial x^k}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^m}{ds} + \\ + \frac{\partial e^i{}_a}{\partial x^k}\frac{d^2 x^k}{ds^2}. \qquad (6.199)$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 e^i{}_a}{\partial x^m \partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^m}(-\Delta^i_{ak}) = \Delta^i_{jk,m} e^j{}_a - \\ -\Delta^i_{sk}(-\Delta^s_{jm} e^j{}_a) = (-\Delta^i_{jk,m} + \Delta^i_{sk}\Delta^s_{jm}) e^j{}_a$$

и

$$\frac{\partial e^i{}_a}{\partial x^k}\frac{d^2 x^k}{ds^2} = \Delta^i_{js}\Delta^s_{km}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^m}{ds} e^j{}_a,$$

то

$$\frac{d^2 e^i{}_a}{ds^2} + (\Delta^i_{jk,m} - \Delta^i_{sk}\Delta^s_{jm} - \Delta^i_{js}\Delta^s_{km})\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^m}{ds} e^j{}_a = 0. \qquad (6.200)$$

Подставляя сюда сумму (6.171), получим

$$\frac{d^2 e^i{}_a}{ds^2} + (\Gamma^i_{jk,m} + T^i_{jk,m} - \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jm} - \Gamma^i_{sk}T^s_{jm} - \\ -T^i_{sk}\Gamma^s_{jm} - T^i_{sk}T^s_{jm} - \Gamma^i_{js}\Gamma^s_{km} - T^i_{js}\Gamma^s_{km} - \\ -\Gamma^i_{js}T^s_{km} - T^i_{js}T^s_{km})\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^m}{ds} e^j{}_a = 0. \qquad (6.201)$$

Шесть независимых уравнений (6.201) (для трех углов Эйлера и трех псевдоевклидовых углов) описывают изменение ориентации тетрады $e^i{}_a$ при движении ее начала $O$ согласно уравнениям геодезических (6.196).

В пространствах $A_4$, в которых метрика является плоской

$$g_{ik} = \eta_{ik} = \mathrm{diag}(1 - 1 - 1 - 1), \qquad (6.202)$$

символы Кристоффеля $\Gamma^i{}_{js}$ обращаются в нуль, и уравнения (6.201) принимают вид

$$\frac{d^2 e^i{}_a}{ds^2} + (T^i_{jk,m} - T^i_{sk}T^s_{jm} - -T^i_{js}T^s_{km})\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^m}{ds}e^j{}_a = 0, \qquad (6.203)$$

а уравнения геодезических (6.175) запишутся как

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + T^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0. \qquad (6.204)$$

Введем теперь тензор четырехмерной угловой скорости вращения тетрады $e^i{}_a$ [40]

$$\Omega_{ij} = T_{ijk}\frac{dx^k}{ds} = -\frac{de_{ia}}{ds}e^a{}_j = \frac{de_{ja}}{ds}e^a{}_i \qquad (6.205)$$

со свойствами симметрии

$$\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}, \qquad (6.206)$$

определяемыми симметрией (6.48), которой удовлетворяют коэффициенты вращения Риччи.

Используя соотношение (6.205), запишем уравнения (6.203) и (6.204) в виде

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Omega^i{}_j\frac{dx^j}{ds} = 0, \qquad (6.207)$$

$$\frac{d\Omega^i{}_j}{ds} - T^i{}_{jk,m}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^m}{ds} + T^i{}_{js}\Omega^s{}_k\frac{dx_k}{ds} = 0\ . \qquad (6.208)$$

Кососимметрическая матрица (6.206) может быть представлена в виде

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{01} & \Omega_{02} & \Omega_{03} \\ \Omega_{10} & 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{20} & \Omega_{21} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{30} & \Omega_{31} & \Omega_{32} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (6.209)$$

Дадим физическую интерпретацию компонентам матрицы (6.209). Для этого умножим уравнения (6.207) на массу $m$ и перепишем их в виде

$$m\frac{d^2 x_i}{ds^2} + m\Omega_{ij}\frac{dx^j}{ds} = 0. \qquad (6.210)$$

При условии (6.202) эти уравнения можно записать как

$$m\frac{du_i}{ds_o} + m\Omega_{ij}\frac{dx^j}{ds_o} = 0, \qquad (6.211)$$

где

$$ds_o = (\eta_{ik} dx^i dx^k)^{1/2} \tag{6.212}$$

– псевдоевклидова метрика и $u_i = dx_i/ds_o$.

Перепишем уравнения (6.211) в виде

$$m\frac{du_i}{ds_o} = -mT_{i(jk)}\frac{dx^j}{ds_o}\frac{dx^k}{ds_o}, \tag{6.213}$$

где симметричная по индексам $j$ и $k$ часть $T$ определяется согласно (6.178).

Считая, что движение, согласно уравнениям (6.213), является нерелятивистским ($v/c \ll 1$), запишем трехмерную часть этих уравнений как

$$m\frac{du_\alpha}{ds_o} = -mT_{\alpha(ok)}\frac{dx^o}{ds_o}\frac{dx^k}{ds_o} - 2mT_{\alpha(\beta k)}\frac{dx^\beta}{ds_o}\frac{dx^k}{ds_o}, \tag{6.214}$$

или, учитывая соотношение (6.205), в виде

$$m\frac{du_\alpha}{ds_o} = -m\Omega_{\alpha o}\frac{dx^o}{ds_o} - 2m\Omega_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{ds_o}. \tag{6.215}$$

Поскольку в нерелятивистском приближении

$$ds_o = cdt = x_o, \quad u_a = \frac{v_\alpha}{c},$$

то уравнения (6.215) запишутся как

$$m\frac{dv_\alpha}{dt} = -mc^2\Omega_{\alpha o} - 2mc^2\Omega_{\alpha\beta}\frac{1}{c}\frac{dx^\beta}{dt}. \tag{6.216}$$

Из классической механики известно, что нерелятивистские уравнения движения начала $O$ трехмерной ускоренной системы отсчета под действием одних только сил инерции имеют вид [41]

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m(-\mathbf{W} + 2[\mathbf{v}\omega]), \tag{6.217}$$

где $\mathbf{W}$ – вектор поступательного ускорения, а $\omega$ – вектор трехмерной угловой скорости вращения ускоренной системы отчета.

Записывая эти уравнения в виде

$$\frac{d}{dt}(mv_\alpha) = m\left(-W_{\alpha o} + 2\omega_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{dt}\right), \tag{6.218}$$

где

$$\mathbf{W} = (W_{10}, W_{20}, W_{30}),$$

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} = -\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.219}$$

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

и, сравнивая их с уравнениями (6.217), получим

$$\Omega_{10} = \frac{W_1}{c^2}, \quad \Omega_{20} = \frac{W_2}{c^2},$$
$$\Omega_{30} = \frac{W_3}{c^2}, \quad \Omega_{12} = -\frac{\omega_3}{c},$$
$$\Omega_{13} = \frac{\omega_2}{c}, \quad \Omega_{23} = -\frac{\omega_1}{c}.$$

Поэтому матрица (6.209) в нашем случае примет вид

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{c^2}\begin{pmatrix} 0 & -W_1 & -W_2 & -W_3 \\ W_1 & 0 & -c\omega_3 & c\omega_2 \\ W_2 & c\omega_3 & 0 & -c\omega_1 \\ W_3 & -c\omega_2 & c\omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.220}$$

Судя по этой матрице, четырехмерное вращение тетрады $e^i{}_a$, вызываемое кручением пространства $A_4$, порождает в физике поля инерции, связанные с поступательными и вращательными ускорениями.

## 6.8 Структурные уравнения правой и левой геометрий $A_4$

Можно рассмотреть три варианта геометрии абсолютного параллелизма.

1. Геометрия $A_4$, у которой отличны от нуля тензор Римана $R^i{}_{jkm}$ и кручение $\Omega_{jk}^{..i}$. Структурные уравнения Картана в этом случае имеют вид

$$\nabla_{[k}e^a{}_{j]} + T^i{}_{[kj]}e^a{}_i = 0, \tag{6.221}$$

$$R^i{}_{jkm} + 2\nabla_{[k}T^i_{|j|m]} + 2T^i_{s[k}T^s_{|j|m]} = 0. \tag{6.222}$$

2. Геометрия $A_4$, у которой тензор Римана $R^i{}_{jkm}$ равен нулю, а кручение $\Omega_{jk}^{..i}$ отлично от нуля. В этом случае структурные уравнения Картана запишутся как

$$\nabla_{[k}e^a_{j]} + T^i_{[kj]}e^a{}_i = 0, \tag{6.223}$$

$$\nabla_{[k}T^i_{|j|m]} + T^i_{s[k}T^s_{|j|m]} = 0. \tag{6.224}$$

3. Геометрия $A_4$, у которой тензор Римана $R^i{}_{jkm}$ и некоординатное кручение $\Omega_{jk}^{..i}$ равны нулю. При этом структурные уравнения Картана геометрии совпадают со структурными уравнениями псевдоевклидова пространства $E_4$, принимая вид

$$\overset{\circ}{\nabla}_{[k}\overset{\circ}{e}{}^a{}_{j]} + \overset{\circ}{T}{}^i{}_{[kj]}\,\overset{\circ}{e}{}^a{}_i = 0, \tag{6.225}$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_{[k}\overset{\circ}{T}{}^{i}{}_{|j|m]}+\overset{\circ}{T}{}^{i}{}_{s[k}\overset{\circ}{T}{}^{s}{}_{|j|m]}=0, \qquad (6.226)$$

где тетрада $\overset{\circ}{e}{}^{a}_{i}$ определяет «координатное кручение»

$$\overset{\circ}{\Omega}{}_{jk}^{..i}=\overset{\circ}{e}{}^{i}_{a}\overset{\circ}{e}{}^{a}_{[k,j]}=\frac{1}{2}\overset{\circ}{e}{}^{i}_{a}(\overset{\circ}{e}{}^{a}{}_{k,j}-\overset{\circ}{e}{}^{a}{}_{j,k}). \qquad (6.227)$$

Поскольку в псевдоевклидовом пространстве группы $T_4$ и $O(3.1)$ действуют глобально и ее внутренняя геометрия тривиальна, то, например, в декартовых координатах $x^0=ct$, $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$ структурные уравнения (6.225) и (6.226) обращаются в тождества

$$0\equiv 0, \qquad (6.228)$$

$$0\equiv 0. \qquad (6.229)$$

Если перейти теперь к сферическим координатам

$$x^0=ct,\quad x^1=r,\quad x^2=\theta,\quad x^3=\varphi,$$

то мы получим уравнения (6.225)–(6.227), в которые входят компоненты:

а) «координатной» тетрады

$$\begin{gathered}\overset{\circ}{e}{}^{(0)}_{0}=\overset{\circ}{e}{}^{(1)}_{1}=1,\quad \overset{\circ}{e}{}^{(2)}_{2}=r,\quad \overset{\circ}{e}{}^{(3)}_{3}=r\sin\theta,\\ \overset{\circ}{e}{}^{0}_{(0)}=\overset{\circ}{e}{}^{1}_{(1)}=1,\quad \overset{\circ}{e}{}^{2}_{(2)}=\frac{1}{r},\quad \overset{\circ}{e}{}^{3}_{(3)}=\frac{1}{r\sin\theta};\end{gathered} \qquad (6.230)$$

б) «координатного кручения»

$$\overset{\circ}{\Omega}{}_{21}^{..2}=\overset{\circ}{\Omega}{}_{31}^{..3}=-(2r)^{-1},\quad \overset{\circ}{\Omega}{}_{32}^{..3}=-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\,\theta; \qquad (6.231)$$

в) коэффициентов вращения Риччи

$$\begin{gathered}\overset{\circ}{T}{}^{1}{}_{22}=r,\quad \overset{\circ}{T}{}^{1}{}_{33}=r\sin^2\theta,\quad \overset{\circ}{T}{}^{2}{}_{33}=\sin\theta\cos\theta,\\ \overset{\circ}{T}{}^{2}{}_{12}=\overset{\circ}{T}{}^{3}{}_{13}=-\frac{1}{r},\quad \overset{\circ}{T}{}^{3}{}_{23}=-\mathrm{ctg}\,\theta.\end{gathered} \qquad (6.232)$$

Используя формулы

$$\overset{\circ}{g}_{ik}=\eta_{ab}\overset{\circ}{e}{}^{a}_{i}\overset{\circ}{e}{}^{b}_{k},\quad \eta_{ab}=\eta^{ab}=\mathrm{diag}(1\ -1\ -1\ -1),$$

находим компоненты метрического тензора

$$\overset{\circ}{g}_{00}=\overset{\circ}{g}_{11}=1,\quad \overset{\circ}{g}_{22}=-r,\quad \overset{\circ}{g}_{33}=-r^2\sin^2\theta,$$

метрику

$$ds_{o}^2=\overset{\circ}{g}_{ij}\,dx^i dx^j=c^2dt^2-dr^2-r^2(de^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$$

и компоненты символов Кристоффеля

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{1}_{33} = -r\sin^2\theta, \quad \overset{\circ}{\Gamma}{}^{1}_{22} = -r, \quad \overset{\circ}{\Gamma}{}^{2}_{12} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}_{13} = \tfrac{1}{r},$$
$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{2}_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}_{23} = \mathrm{ctg}\,\theta. \tag{6.233}$$

Таким образом, в псевдоевклидовой геометрии $A_4$ при уклонении от декартовых координат вместо тождеств (6.228) и (6.229) появляются «координатные структурные уравнения» (6.225) и (6.226).

Предположим теперь, что исходное псевдоевклидово пространство $A_4$ деформируется непрерывным образом (например, с помощью конформных преобразований) в пространство $A_4$ с отличным от нуля динамическим полем кручения и обладающим структурными уравнениями (6.223) и (6.224). При этом можно различать правые

$$\overset{+}{\Omega}{}^{\cdot\cdot i}_{jk} = r^{i}{}_{a} r^{a}{}_{[k,j]} = \frac{1}{2} r^{i}{}_{a}(r^{a}{}_{k,j} - r^{a}{}_{j,k}) \tag{6.234}$$

и левые

$$\overset{-}{\Omega}{}^{\cdot\cdot i}_{jk} = l^{i}{}_{a} l^{a}{}_{[k,j]} = \frac{1}{2} l^{i}{}_{a}(l^{a}{}_{k,j} - l^{a}{}_{j,k}) \tag{6.235}$$

поля кручения. В этих уравнениях через $r^{i}{}_{a}$ и $l^{i}{}_{a}$ обозначены правые и левые тетрады соответственно.

Под правой тетрадой $r^{i}{}_{a}$ мы будем подразумевать такую тетраду $\overset{+}{e}{}^{i}{}_{a}$, у которой при вращении трехмерной пространственной части от оси $x$ к оси $y$ вектор угловой скорости вращения направлен вдоль оси $z$, при этом вращение происходит против часовой стрелки, если смотреть с той стороны, куда направлен вектор $z$. Так, например, матрица четырехмерных вращений (6.220) для правой тетрады имеет вид

$$\overset{+}{\Omega}_{ij} = \frac{1}{c^2}\begin{pmatrix} 0 & -W_1 & -W_2 & -W_3 \\ W_1 & 0 & -c\omega_3 & c\omega_2 \\ W_2 & c\omega_3 & 0 & -c\omega_1 \\ W_3 & -c\omega_2 & c\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.236}$$

в то время как для левой

$$\overline{\Omega}_{ij} = \frac{1}{c^2}\begin{pmatrix} 0 & W_1 & W_2 & W_3 \\ -W_1 & 0 & c\omega_3 & -c\omega_2 \\ -W_2 & -c\omega_3 & 0 & c\omega_1 \\ -W_3 & c\omega_2 & -c\omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.237}$$

Отсюда видно, что имеет место соотношение

$$\overset{+}{\Omega}_{ij} = -\overset{-}{\Omega}_{ij}\ . \tag{6.238}$$

Учитывая равенство (6.205) и соотношение (6.238), получим

$$\overset{+}{T}{}^{i}{}_{jk} = -\overset{-}{T}{}^{i}{}_{jk}. \tag{6.239}$$

Поскольку метрический тензор $g_{ik}$ определяется как правой, так и левой тетрадой одинаковым образом [42]

$$g_{ik} = \eta_{ab} r^a{}_i r^b{}_k = \eta_{ab} l^a{}_i l^b{}_k, \tag{6.240}$$

то из определения

$$T^i_{jk} = -\Omega^{..i}_{jk} + g^{im}(g_{js}\Omega^{..s}_{mk} + g_{ks}\Omega^{..s}_{mj}) \tag{6.241}$$

следует, что компоненты (6.234) и (6.235) правых и левых полей кручения различаются знаком

$$\overset{+}{\Omega}{}^{..i}_{jk} = -\overset{-}{\Omega}{}^{..i}_{jk}. \tag{6.242}$$

Разделяя поля кручения на левые и правые, мы тем самым расщепляем группу трансляции $T_4$ на группу правых $\overset{+}{T}_4$ и левых $\overset{-}{T}_4$ трансляций, а группу вращений $O(3.1)$ – на группу правых $SO^+(3.1)$ и левых $SO^-(3.1)$ вращений.

Структурные уравнения Картана геометрии $A_4$, которые преобразуются с использованием непрерывных преобразований в группах $T_4$ и $SO^+(3.1)$, мы будем обозначать как

$$\nabla_{[k} \overset{+}{e}{}^a{}_{j]} + \overset{+}{T}{}^i{}_{[kj]} \overset{+}{e}{}^a{}_i = 0, \tag{6.243}$$

$$\nabla_{[k} \overset{+}{T}{}^i{}_{|j|m]} + \overset{+}{T}{}^i{}_{s[k} \overset{+}{T}{}^s{}_{|j|m]} = 0. \tag{6.244}$$

Соответственно уравнения

$$\nabla_{[k}\overline{e}^a{}_{j]} + \overline{T}^i{}_{[kj]}\overline{e}^a{}_i = 0, \tag{6.245}$$

$$\nabla_{[k}\overline{T}^i{}_{|j|m]} + \overline{T}^i{}_{s[k}\overline{T}^s{}_{|j|m]} = 0 \tag{6.246}$$

преобразуются непрерывным образом в группах $T_4$ и $SO(3.1)$.

Понятно, что преобразование инверсии позволяет переводить правые уравнения (6.243) и (6.244) в левые (6.245) и (6.246), и наоборот.

Свойство (6.242) геометрии $A_4$ позволяет производить «расщепление» псевдоевклидовой геометрии на правую и левую геометрии

$$\overset{\circ}{\Omega}{}^{..i}_{jk} = \overset{+}{\Omega}{}^{..i}_{jk} + \overline{\Omega}^{..i}_{jk} = 0, \tag{6.247}$$

кручение которых отлично от нуля. Это свойство оказалось очень полезным при описании рождения материи из «ничего» в теории физического вакуума [43].

Расщепляя теперь структурные уравнения Картана (6.221) и (6.222) на правые и левые, имеем

$$\nabla_{[k} \overset{+}{e}{}^a{}_{j]} + \overset{+}{T}{}^i{}_{[kj]} \overset{+}{e}{}^a{}_i = 0, \tag{6.248}$$

$$\overset{+}{R}{}^{i}{}_{jkm} + 2\nabla_{[k}\overset{+}{T}{}^{i}{}_{|j|m]} + 2\,\overset{+}{T}{}^{i}{}_{s[k}\overset{+}{T}{}^{s}{}_{|j|m]} = 0, \tag{6.249}$$

$$\nabla_{[k}\,\overset{-}{e}{}^{a}{}_{j]} + \overset{-}{T}{}^{i}{}_{[kj]}\,\overset{-}{e}{}^{a}{}_{i} = 0, \tag{6.250}$$

$$\overset{-}{R}{}^{i}{}_{jkm} + 2\nabla_{[k}\overset{-}{T}{}^{i}{}_{|j|m]} + 2\,\overset{-}{T}{}^{i}{}_{s[k}\,\overset{-}{T}{}^{s}{}_{|j|m]} = 0. \tag{6.251}$$

Записывая структурные уравнения Картана в виде расширенных правых и левых систем уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса, получим

$$\begin{array}{rl}
\nabla_{[k}\,\overset{+}{e}{}^{a}{}_{j]} + \overset{+}{T}{}^{i}{}_{[kj]}\,\overset{+}{e}{}^{a}{}_{i} = 0, & (\overset{+}{A}) \\
\overset{+}{R}_{jm} - \frac{1}{2}g_{jm}\,\overset{+}{R} = \nu\,\overset{+}{T}_{jm}, & (\overset{+}{B}.1) \\
\overset{+}{C}{}^{i}{}_{jkm} + 2\nabla_{[k}\overset{+}{T}{}^{i}{}_{|j|m]} + 2\,\overset{+}{T}{}^{i}{}_{s[k}\,\overset{+}{T}{}^{s}{}_{|j|m]} = -\nu\,\overset{+}{J}{}^{i}{}_{jkm}, & (\overset{+}{B}.2)
\end{array} \tag{6.252}$$

$$\begin{array}{rl}
\nabla_{[k}\,\overset{-}{e}{}^{a}{}_{j]} + \overset{-}{T}{}^{i}{}_{[kj]}\,\overset{-}{e}{}^{a}{}_{i} = 0, & (\overset{-}{A}) \\
\overset{-}{R}_{jm} - \frac{1}{2}g_{jm}\,\overset{-}{R} = \nu\,\overset{-}{T}_{jm}, & (\overset{-}{B}.1) \\
\overset{-}{C}{}^{i}{}_{jkm} + 2\nabla_{[k}\overset{-}{T}{}^{i}{}_{|j|m]} + 2\,\overset{-}{T}{}^{i}{}_{s[k}\,\overset{-}{T}{}^{s}{}_{|j|m]} = -\nu\,\overset{-}{J}{}^{i}{}_{jkm}. & (\overset{-}{B}.2)
\end{array} \tag{6.253}$$

В теории физического вакуума, основанной на всеобщем принципе относительности [44], уравнения (6.252) и (6.253) описывают правую и левую материи, рожденные из вакуума.

# Глава 7

# Геометрия абсолютного параллелизма в спинорном базисе

## 7.1 Три основных спинорных базиса геометрии $A_4$

В гл. 6 структурые уравнения геометрия абсолютного параллелизма записаны в векторном базисе. Как было показано, их можно представить в виде правых $(A^+)$, $(B^+)$ (инвариантных относительно групп $T_4^+$ и $SO^+(3.1)$) и левых $(A^-)$, $(B^-)$ (инвариантных относительно групп $T_4^-$ и $SO^-(3.1)$) уравнений. В свою очередь, уравнения $(A^+)$, $(B^+)$ (или $(A^-)$, $(B^-)$) могут быть расщеплены путем перехода к спинорному базису на группу уравнений, в которых составляющие их поля имеют противоположные спины. Для этого нам необходимо использовать спинорный базис и некоторые элементы спинорного анализа.

Будем рассматривать спинорную геометрию $A_4$ как дифференцируемое многообразие $X_4$, в каждой точке $M$ которого с трансляционными координатами $x$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ введено двумерное комплексное спинорное пространство $\mathcal{C}^2$ [29]. Имеются три возможности для введения спинорного базиса в спинорном пространстве $\mathcal{C}^2$:

а) спинорный Г-базис, образованный символами Инфельда–Ван-дер-Вардена $\sigma^i_{\alpha\dot\beta}$ [45], удовлетворяющими равенству

$$\nabla_n \sigma^i_{\alpha\dot\beta} = 0; \tag{7.1}$$

б) спинорный $\Delta$-базис, образованный символами Ньюмена–Пенроуза $\sigma^i_{A\dot B}$ [30], удовлетворяющими равенству

$$\overset{*}{\nabla}_n \sigma^i_{A\dot B} = 0; \tag{7.2}$$

в) спинорный диадный базис $\xi^{\alpha}_{B}$, удовлетворяющий равенству [46]

$$\varepsilon^{BD}\xi_{\alpha D}\nabla_k\xi^{\alpha}_{B} = 0. \tag{7.3}$$

В соотношениях (7.1)–(7.3) индексы $\alpha, \dot\beta, \ldots$ и $A, \dot B, \ldots$ являются спинорными индексами, пробегающими значения 0,1 и $\dot 0, \dot 1$. Всякий локальный вектор $A^i$, принадлежащий $\mathcal{C}^2$, может быть представлен в виде спин-тензора второго ранга в спинорном Γ-базисе [47]

$$A^i = A^{\alpha\dot\beta}\sigma^i{}_{\alpha\dot\beta}, \tag{7.4}$$

либо в спинорном Δ-базисе

$$A^i = A^{A\dot B}\sigma^i{}_{A\dot B}. \tag{7.5}$$

Таким образом, все спин-тензоры, отнесенные к Γ-базису, будут иметь спинорные индексы $\alpha, \dot\beta, \ldots$, а спин-тензоры, отнесенные к Δ-базису, – спинорные индексы $A, \dot B, \ldots$. Что же касается диадного базиса $\xi^{\alpha}_{B}$, то он является связующим между Γ и Δ-базисами [48]

$$\sigma^i{}_{A\dot B} = \sigma^i{}_{\alpha\dot\beta}\xi^{\alpha}_{A}\overline{\xi}^{\dot\beta}_{\dot B}, \tag{7.6}$$

где

$$\overline{\xi}^{\dot\beta}_{\dot B} = \overline{\xi^{\beta}_{B}},$$

а черта в правой части равенства означает комплексное сопряжение.

Спинорный Δ-базис связан с векторным базисом $e^a{}_i$ посредством следующих соотношений:

$$\sigma^i{}_{A\dot B} = e^i{}_a\sigma^a{}_{A\dot B}, \tag{7.7}$$

$$\sigma_i^{A\dot B} = e^a{}_i\sigma_a^{A\dot B}, \tag{7.8}$$

где $\sigma_i{}^{A\dot B}$ – комплексные эрмитовы $(\overline{\sigma_i{}^{A\dot B}} = \sigma_i{}^{\dot A B})$ матрицы, а матрицы $\sigma^a{}_{A\dot B}$ и $\sigma_a{}^{A\dot B}$ имеют вид

$$\sigma^a{}_{A\dot B} = (2)^{-1/2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{7.9}$$

$$\sigma_a^{A\dot B} = (2)^{-1/2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{7.10}$$

причем

$$\det(\sigma^a{}_{A\dot B}) = i,$$

$$\det(\sigma_a^{A\dot B}) = -i.$$

Из условий ортогональности тетрады $e^i_a$

$$e^a{}_i e^j{}_a = \delta_i{}^j, \quad e^a{}_i e^i{}_b = \delta^a{}_b \tag{7.11}$$

и соотношений (7.7)–(7.10) следуют условия ортогональности для спинорного $\Delta$-базиса

$$\sigma_i^{A\dot{B}} \sigma^j_{A\dot{B}} = \delta_i{}^j, \tag{7.12}$$

$$\sigma_i^{A\dot{B}} \sigma^i_{C\dot{E}} = \delta^A{}_C \delta^{\dot{B}}{}_{\dot{E}}. \tag{7.13}$$

Для спинорного Г-базиса имеются следующие условия ортогональности [31]

$$\sigma_i^{\alpha\dot{\beta}} \sigma^j_{\alpha\dot{\beta}} = \delta_i{}^j, \tag{7.14}$$

$$\sigma_i^{\alpha\dot{\beta}} \sigma^i_{\rho\dot{\nu}} = \delta^\alpha{}_\rho \delta^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\nu}}. \tag{7.15}$$

Отсюда с учетом соотношений (7.6), (7.12), (7.13) следуют условия ортогональности для спинорной диады

$$\begin{gathered} \xi^o_\alpha \xi^\alpha_1 = 1, \\ \xi^\alpha_o \xi^o_\alpha = -\xi^o_\alpha \xi^\alpha_o = 0, \\ \xi^\alpha_1 \xi^1_\alpha = 0. \end{gathered} \tag{7.16}$$

Кроме того, имеют место соотношения [31]

$$\begin{gathered} \xi^o_\alpha \xi^\beta_o - \xi^1_\alpha \xi^\beta_o = \delta^\beta_\alpha, \\ \xi^o_\alpha \xi^1_\beta - \xi^1_\alpha \xi^o_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta}, \end{gathered} \tag{7.17}$$

где

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} = \varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\delta}} = \varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.18}$$

– фундаментальный спинор [30], удовлетворяющий следующим соотношениям:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\kappa\beta} = \varepsilon^\kappa_\alpha = -\varepsilon^\kappa_\alpha, \tag{7.19}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\kappa\pi} = \delta^\kappa_\alpha \delta^\pi_\beta - \delta^\pi_\alpha \delta^\kappa_\beta, \tag{7.20}$$

$$\varepsilon^\alpha_\alpha = 2, \tag{7.21}$$

$$\varepsilon_{\alpha[\beta}\varepsilon_{\kappa\delta]} = 0, \tag{7.22}$$

$$\varepsilon^\beta_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.23}$$

Фундаментальный спинор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ поднимает и опускает индексы у спин-тензоров, отнесенных к Г-базису, подобно метрическому тензору $g_{ik}$ в векторном базисе. В спинорном $\Delta$-базисе он имеет вид

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{\alpha\beta}\xi^\alpha_A \xi^\beta_B, \tag{7.24}$$

причем

$$\varepsilon^{AB} = \varepsilon_{AB} = \varepsilon^{\dot{C}\dot{D}} = \varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.25}$$

Фундаментальный спинор $\varepsilon_{AB}$ поднимает и опускает индексы у спин-тензоров, отнесенных к $\Delta$-базису. Так, например, мы имеем

$$\begin{array}{ll} \chi^{\dots A \dots}_{\dots\dots\dots}\varepsilon_{AB} = \chi^{\dots\dots\dots}_{\dots B \dots}, & \varepsilon^{AB}\chi^{\dots\dots\dots}_{\dots B \dots} = \chi^{\dots A \dots}_{\dots\dots\dots}, \\ \varphi^{\dots \dot{A} \dots}_{\dots\dots\dots}\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} = \varphi^{\dots\dots\dots}_{\dots \dot{B} \dots}, & \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}}\varphi^{\dots\dots\dots}_{\dots \dot{B} \dots} = \varphi^{\dots \dot{A} \dots}_{\dots\dots\dots}. \end{array} \tag{7.26}$$

Если спинор антисимметричен по двум индексам

$$\theta_{\dots A \dots B \dots} = -\theta_{\dots B \dots A \dots}, \tag{7.27}$$

то с помощью фундаментального спинора $\varepsilon_{AB}$ его можно представить как [30]

$$\theta_{\dots A \dots B \dots} = \frac{1}{2}\varepsilon_{AB}\theta^{\dots\dots\dots C \dots}_{\dots C \dots}. \tag{7.28}$$

Эти же свойства имеют место в спинорном $\Gamma$-базисе для фундаментального спинора $\varepsilon_{\alpha\beta}$.

## 7.2 Спинорное представление структурных уравнений Картана геометрии $A_4$

Соотношение (7.28) позволяет сводить спиноры, несимметричные по штрихованным и нештрихованным индексам, к спинорам, полностью (или частично) симметричным по штрихованным и нештрихованным индексам. В пространстве спиноров данного типа реализуются неприводимые представления группы $SL(2.C)$ [30], заменяющей $SO(3.1)$ при переходе к спинорному базису.

**Определение.** *Мы будем говорить, что компоненты спинора с $r$ симметричными нижними штрихованными индексами и с $s$ симметричными нижними штрихованными индексами преобразуются по $D(r/2, s/2)$ неприводимому представлению группы $SL(2.C)$.*

Например, спинор

$$F_{AB} = F_{BA}$$

преобразуется по $D(1.0)$, а спинор

$$F_{\dot{C}\dot{D}} = F_{\dot{D}\dot{C}}$$

– по $D(0.1)$ неприводимому представлению группы $SL(2.C)$.

Запишем основные соотношения геометрии $A_4$ в спинорном $\Delta$-базисе. Это можно сделать, используя спинорное представление произвольного тензора $T^{\dots i \dots \dots}_{\dots \dots j \dots}$ в $\Delta$-базисе

$$T^{\dots A\dot{B} \dots \dots}_{\dots \dots C\dot{E} \dots} = \sigma_i^{A\dot{B}} T^{\dots i \dots \dots}_{\dots \dots j \dots} \sigma^j_{C\dot{E}} \tag{7.29}$$

или просто заменяя матричные индексы на два спинорных по правилу:

$$e_i^a \leftrightarrow \sigma_i^{A\dot{B}}, \tag{7.30}$$

$$T^a{}_{bm} \leftrightarrow T^{A\dot{B}}{}_{C\dot{D}m}, \tag{7.31}$$

$$R^a{}_{bkm} \leftrightarrow R^{A\dot{B}}{}_{C\dot{D}km}, \tag{7.32}$$

$$\eta_{ab} \leftrightarrow \eta_{A\dot{B}C\dot{D}} = \varepsilon_{AC}\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}} \tag{7.33}$$

и т.д.

В спинорном $\Delta$-базисе метрический тензор $g_{ij}$ геометрии $A_4$ имеет вид

$$g_{ij} = \varepsilon_{AC}\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}\sigma_i^{A\dot{B}}\sigma_j^{C\dot{D}}. \tag{7.34}$$

*Доказательство.* Подставляя в равенство

$$g_{ij} = \eta_{ab} e^a{}_i e^b{}_j$$

соотношения (7.7), (7.8), записанные в виде

$$e^a{}_i = \sigma_i^{A\dot{B}}\sigma^a{}_{A\dot{B}}, \quad e^b{}_j = \sigma^{C\dot{D}}{}_j \sigma^b{}_{C\dot{D}}, \tag{7.35}$$

имеем

$$g_{ij} = \eta_{ab}\sigma_i^{A\dot{B}}\sigma^a_{A\dot{B}}\sigma_j^{C\dot{D}}\sigma^b_{C\dot{D}}. \tag{7.36}$$

Учитывая соотношения (7.9), (7.10), (7.25) и определение

$$\eta_{ab} = \eta^{ab} = \mathrm{diag}(1\ -1\ -1\ -1),$$

находим следующее равенство

$$\eta_{ab}\sigma^a_{A\dot{B}}\sigma^b_{C\dot{D}} = \varepsilon_{AC}\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}.$$

Подставляя это соотношение в равенство (7.36), получим формулу (7.34).

Запишем структурные уравнения Картана в матричном виде

$$\nabla_{[k}e^a_{m]} - e^b_{[k}T^a_{|b|m]} = 0, \tag{A}$$

$$R^a_{bkm} + 2\nabla_{[k}T^a_{|b|m]} + 2T^a_{c[k}T^c_{|b|m]} = 0. \tag{B}$$

Используя правила (7.30)–(7.32), запишем эти уравнения в спинорном $\Delta$-базисе

$$\nabla_{[k}\sigma^{A\dot{B}}_{m]} - \sigma^{C\dot{D}}_{[k}T^{A\dot{B}}{}_{|C\dot{D}|m]} = 0, \tag{7.37}$$

$$R^{A\dot{B}}{}_{C\dot{D}km} + 2\nabla_{[k}T^{A\dot{B}}{}_{|C\dot{D}|m]} + 2T^{A\dot{B}}{}_{E\dot{F}[k}T^{E\dot{F}}{}_{|C\dot{D}|m]} = 0. \qquad (7.38)$$

Соответственно второе тождество Бианки геометрии $A_4$

$$\nabla_{[n}R^a_{|b|km]} + R^c_{b[km}T^a_{|c|n]} - T^c_{b[n}R^a_{|c|km]} = 0 \qquad (D)$$

в спинорном $\Delta$-базисе принимает вид

$$\nabla_{[n}R^{A\dot{B}}{}_{|C\dot{D}|km]} + R^{E\dot{F}}{}_{C\dot{D}[km}T^{A\dot{B}}{}_{|C\dot{D}|n]} - T^{E\dot{F}}{}_{C\dot{D}[n}R^{A\dot{E}}{}_{|E\dot{F}|km]} = 0. \qquad (7.39)$$

Если $F_{ij} = -F_{ji}$ – вещественный антисимметричный тензор, то соответствующий ему спинор

$$F_{A\dot{B}C\dot{D}} = F_{ij}\sigma^i_{A\dot{B}}\sigma^j_{C\dot{D}} \qquad (7.40)$$

может быть представлен в виде

$$F_{A\dot{B}C\dot{D}} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}F_{AC} + \varepsilon_{AC}\overline{F}_{\dot{B}\dot{D}}), \qquad (7.41)$$

где спинор

$$F_{AC} = F_{CA} \qquad (7.42)$$

преобразуется по $D(1.0)$ неприводимому представлению группы $SL(2.C)$, а спинор

$$\overline{F}_{BD} = F_{\dot{B}\dot{D}} = F_{\dot{D}\dot{B}} \qquad (7.43)$$

– по $D(0.1)$ неприводимому представлению этой же группы.

*Доказательство.* Из антисимметрии тензора $F_{ij}$ и равенства (7.40) имеем

$$F_{A\dot{B}C\dot{D}} = -F_{C\dot{D}A\dot{B}}. \qquad (7.44)$$

Перепишем это соотношение в виде

$$F_{A\dot{B}C\dot{D}} = \frac{1}{2}(F_{A\dot{B}C\dot{D}} - F_{C\dot{D}A\dot{B}} = \frac{1}{2}(F_{A\dot{B}C\dot{D}} - F_{C\dot{D}A\dot{B}} + F_{C\dot{D}A\dot{B}} - -F_{C\dot{D}A\dot{B}}). \qquad (7.45)$$

Используя фундаментальный спинор (7.25), можно записать (7.45) следующим образом

$$F_{A\dot{B}C\dot{D}} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{AC}F_{F\dot{B}}{}^{F}{}_{\dot{D}} + \varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}F_{A\dot{B}C}{}^{\dot{B}}). \qquad (7.46)$$

Обозначая $F_{AC} = (1/2)F_{A\dot{E}C}{}^{\dot{E}}$ и учитывая (7.44), имеем

$$F_{AC} = \frac{1}{2}F_{A\dot{E}C}{}^{\dot{E}} = -\frac{1}{2}F_{A}{}^{\dot{E}}{}_{C\dot{E}} = F_{CA}. \qquad (7.47)$$

Далее, вводя обозначение $\overline{F}_{\dot{B}\dot{D}} = \frac{1}{2}F_{F\dot{B}}{}^{F}{}_{\dot{D}}$ и учитывая вещественность $F_{ij}$, находим

$$\overline{F}_{\dot{B}\dot{D}} = \frac{1}{2}F_{F\dot{B}}{}^{F}{}_{\dot{D}} = \frac{1}{2}\overline{F}_{\dot{F}B}{}^{\dot{F}}{}_{D} = \overline{F}_{BD}. \qquad (7.48)$$

Подставляя соотношения (7.47) и (7.48) в равенство (7.46), получим соотношение (7.41). По определению спинор $F_{AC} = F_{CA}$ принадлежит к $D(1.0)$ неприводимому представлению группы $SL(2.C)$, а спинор $\overline{F}_{\dot{B}\dot{D}} = \overline{F}_{\dot{D}\dot{B}}$ – к $D(0.1)$ неприводимому представлению этой группы.

Поскольку величины $T_{A\dot{B}C\dot{D}m}$ и $R_{A\dot{B}C\dot{D}kn}$ в уравнениях (7.37) и (7.38) антисимметричны по паре спинорных матричных индексов $A\dot{B}$ и $C\dot{D}$, то, используя формулы (7.27) и (7.28), их можно представить в виде

$$T_{A\dot{B}C\dot{D}k} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}T_{ACk} + \varepsilon_{AC}T^{+}_{\dot{B}\dot{D}k}), \tag{7.49}$$

$$R_{A\dot{B}C\dot{D}kn} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}R_{ACkn} + \varepsilon_{AC}R^{+}_{\dot{B}\dot{D}kn}), \tag{7.50}$$

где

$$T_{ACk} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{B}\dot{D}}T_{A\dot{B}C\dot{D}k}, \quad T^{+}_{\dot{B}\dot{D}k} = \frac{1}{2}\varepsilon^{AC}T_{A\dot{B}C\dot{D}k}, \tag{7.51}$$

$$R_{ACkn} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{B}\dot{D}}R_{A\dot{B}C\dot{D}kn}, \quad R^{+}_{\dot{B}\dot{D}kn} = \frac{1}{2}\varepsilon^{AC}R_{A\dot{B}C\dot{D}kn}. \tag{7.52}$$

В этих соотношениях знак «плюс» у спинорных матриц означает эрмитово сопряжение.

## 7.3 Расщепление структурных уравнений Картана по неприводимым представлениям группы $SL(2.C)$

По спинорным индексам матрицы (7.51) и (7.52) имеют следующие законы преобразования:

$$T^{A'}_{\ C'k} = S^{A'}_{A}T^{A}_{\ Ck}S^{C}_{C'} + S^{A'}_{A}S^{A}_{C',k}, \tag{7.53}$$

$$T^{+\dot{B}'}_{\ \dot{D}'k} = S^{+\dot{B}'}_{\dot{B}}T^{+\dot{B}}_{\ \dot{D}k}S^{+\dot{D}}_{\dot{D}'} + S^{+\dot{B}'}_{\dot{B}}S^{\dot{B}}_{\dot{D}',k}, \tag{7.54}$$

$$R^{A'}{}_{C'kn} = S^{A'}_{A}R^{A}{}_{Ckn}S^{C}_{C'}, \tag{7.55}$$

$$R^{+\dot{B}'}{}_{\dot{D}'kn} = S^{+\dot{B}'}_{\dot{B}}R^{+\dot{B}}{}_{\dot{D}kn}S^{+\dot{D}}_{\dot{D}'}. \tag{7.56}$$

Матрицы $S^{A'}_{A}$ и $S^{+B}_{\dot{B}}$ образуют группу $SL(2.C)$, причем матрицы

$$S^{A'}_{A} \tag{7.57}$$

принадлежат подгруппе

$$SL^{+}(2.C) \tag{7.58}$$

группы $SL(2.C)$. По (7.58) преобразуются спиноры, принадлежащие неприводимому представлению $D(r/2, 0)$.

С другой стороны, матрицы

$$S^{+\dot{B}'}_{\dot{B}} \tag{7.59}$$

принадлежат подгруппе

$$SL^{-}(2.C) \tag{7.60}$$

группы $SL(2.C)$. По (7.60) преобразуются спиноры, принадлежащие неприводимому представлению $D(0, s/2)$. Эти свойства спиноров позволяют расщепить структурные уравнения Картана на уравнения, в которые входят спиноры, преобразующиеся по $D(r/2, 0)$ или $D(0, s/2)$ неприводимым представлениям группы $SL(2.C)$.

Вторые структурные уравнения Картана $(B)$ в спинорном $\Delta$-базисе расщепляются на уравнения вида

$$R_{ACkn} + 2\nabla_{[k}T_{|AC|n]} + 2T_{AE[k}T^{E}_{|C|n]} = 0, \tag{7.61}$$

$$R^{+}_{\dot{B}\dot{D}kn} + 2\nabla_{[k}T^{+}_{|\dot{B}\dot{D}|n]} + 2T^{+}_{\dot{B}\dot{F}[k}T^{+\dot{F}}_{\ \ |\dot{D}|n]} = 0. \tag{7.62}$$

*Доказательство.* Запишем вторые структурные уравнения Картана (7.38) в виде

$$B_{A\dot{B}C\dot{D}kn} = R_{A\dot{B}C\dot{D}km} + 2\nabla_{[k}T_{|A\dot{B}C\dot{D}|m]} + 2T_{A\dot{B}E\dot{F}[k}T^{E\dot{F}}_{|C\dot{D}|m]} = 0. \tag{7.63}$$

Используя свойство антисимметрии спинора $B_{A\dot{B}C\dot{D}kn}$ по паре спинорных индексов $A\dot{B}$ и $\dot{C}D$, представим его как

$$B_{A\dot{B}C\dot{D}kn} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}B_{ACkn} + \varepsilon_{AC}B^{+}_{\dot{B}\dot{D}kn}) = 0, \tag{7.64}$$

где

$$B_{ACkn} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{B}\dot{D}}B_{A\dot{B}C\dot{D}kn} = 0, \tag{7.65}$$

$$B^{+}_{\dot{B}\dot{D}kn} = \frac{1}{2}\varepsilon^{AC}B_{A\dot{B}C\dot{D}kn} = 0. \tag{7.66}$$

Подставляя в уравнения (7.65) и (7.66) соотношение (7.63) и используя матрицы (7.51) и (7.52), получим структурные уравнения (7.61) и (7.62) в расщепленном виде. При выводе нами были использованы свойства (7.19)–(7.23) фундаментального спинора $\varepsilon_{AB}$.

Матрицы $T_{ACk}$ и $T^{+}_{\dot{B}\dot{D}k}$ в диадном базисе $\xi_{\alpha C}$ имеют следующий вид:

$$T_{ACk} = \xi_{\alpha C}\nabla_k \xi^{\alpha}_{A} = T_{ACk}, \tag{7.67}$$

$$T^{+}_{\dot{B}\dot{D}k} = \overline{\xi}_{\dot{\alpha}\dot{D}}\nabla_k \overline{\xi}^{\dot{\alpha}}_{\dot{B}} = T^{+}_{\dot{B}\dot{D}k}. \tag{7.68}$$

*Доказательство.* Запишем матрицы

$$T_{abk} = e^{i}{}_{b}\nabla_k e_{ai}$$

в спинорном базисе, используя правила (7.30) и (7.31)

$$T_{A\dot{B}C\dot{D}k} = \sigma^{i}_{C\dot{D}}\nabla_k \sigma_{A\dot{B}i}. \tag{7.69}$$

Подставляя это выражение в первое из соотношений (7.51), получим

$$T_{ACk} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{B}\dot{D}}\sigma^{i}_{C\dot{D}}\nabla_k\sigma_{A\dot{B}\,i}. \tag{7.70}$$

Используя формулу (7.6), запишем $\sigma_{A\dot{B}\,i}$ как

$$\sigma_{A\dot{B}\,i} = \sigma_{\alpha\dot{\beta}\,i}\xi^{\alpha}_{A}\overline{\xi}^{\dot{\beta}}_{\dot{B}}. \tag{7.71}$$

Подставляя соотношение (7.71) в равенство (7.70), находим

$$\begin{aligned} T_{ACk} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{B}\dot{D}}\sigma^{i}_{C\dot{D}}\nabla_k(\sigma_{\alpha\dot{\beta}\,i}\xi^{\alpha}_{A}\overline{\xi}^{\dot{\beta}}_{\dot{B}}) = \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{B}\dot{D}}\sigma^{i}_{C\dot{D}}\sigma_{\alpha\dot{\beta}\,i}\nabla_k(\xi^{\alpha}_{A}\overline{\xi}^{\dot{\beta}}_{\dot{B}}), \end{aligned} \tag{7.72}$$

поскольку $\nabla_k(\sigma_{\alpha\dot{\beta}\,i}) = 0$.

Далее, учитывая, что

$$\begin{aligned} \sigma^{i}_{C\dot{D}}\sigma_{\alpha\dot{\beta}\,i} &= \sigma_{\nu\dot{\gamma}}{}^{i}\xi^{\nu}_{C}\overline{\xi}^{\dot{\gamma}}_{\dot{D}}\sigma_{\alpha\dot{\beta}\,i} = \\ &= \delta_{\nu\alpha}\delta_{\dot{\gamma}\dot{\beta}}\xi^{\nu}_{C}\overline{\xi}^{\dot{\gamma}}_{\dot{D}} = \xi_{C\alpha}\overline{\xi}_{\dot{D}\dot{\beta}}, \end{aligned}$$

запишем равенство (7.72) как

$$T_{ACk} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{B}\dot{D}}\xi_{C\alpha}\overline{\xi}_{\dot{D}\dot{\beta}}(\overline{\xi}^{\dot{\beta}}_{\dot{B}}\nabla_k\xi^{\alpha}_{A} + \xi^{\alpha}_{A}\nabla_k\overline{\xi}^{\dot{\beta}}_{\dot{B}}). \tag{7.73}$$

В диадном базисе справедливы равенства

$$\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}} = \overline{\xi}_{\dot{D}\dot{\beta}}\overline{\xi}^{\dot{\beta}}_{\dot{B}}, \quad \varepsilon^{\dot{B}\dot{D}}\overline{\xi}_{\dot{D}\dot{\beta}}\nabla_k\overline{\xi}^{\dot{\beta}}_{\dot{B}} = 0,$$

сопряженные соотношениям (7.3) и (7.24). Используя эти равенства, легко получить соотношение (7.67). Действуя подобным образом для сопряженной матрицы $T^{+}{}_{\dot{B}\dot{D}\,k}$, получим равенство (7.68).

В спинорном $\Delta$-базисе первые структурные уравнения Картана ($A$) геометрии $A_4$ имеют вид

$$\nabla_{[k}\sigma^{i]}_{C\dot{D}} - T_{[k|CE}\sigma^{E}{}_{\dot{D}}|^{i]} - \sigma^{[i}_{|C\dot{F}|}T^{+}_{k]\dot{D}}{}^{\dot{F}} = 0 \tag{7.74}$$

или, опуская матричные индексы,

$$\nabla_{[k}\sigma^{i]} - T_{[k}\sigma^{i]} - \sigma^{[i}T^{+}_{k]} = 0. \tag{7.75}$$

*Доказательство.* Вычислим производную $\nabla_k\sigma^{i}_{C\dot{D}}$

$$\nabla_k\sigma^{i}_{C\dot{D}} = \nabla_k(\sigma^{i}_{\alpha\dot{\beta}}\xi^{\alpha}_{C}\overline{\xi}^{\dot{\beta}}_{\dot{D}}) = \sigma^{i}_{\alpha\dot{\beta}}(\overline{\xi}^{\dot{\beta}}_{\dot{D}}\nabla_k\xi^{\alpha}_{C} + \xi^{\alpha}_{C}\nabla_k\overline{\xi}^{\dot{\beta}}_{\dot{D}}).$$

Используя формулы (7.67) и (7.68), запишем это соотношение как

$$\nabla_k\sigma^{i}_{C\dot{D}} = \sigma^{i}_{\alpha\dot{\beta}}(T_{CEk}\xi^{\alpha E}\overline{\xi}^{\dot{\beta}}_{\dot{D}} + T^{+}_{\dot{D}\dot{F}k}\xi^{\alpha}_{C}\overline{\xi}^{\dot{\beta}\dot{F}}). \tag{7.76}$$

Здесь были использованы условия нормировки

$$\xi_{\alpha E}\xi^{\alpha E} = 1, \quad \overline{\xi}_{\dot\beta \dot F}\overline{\xi}^{\dot\beta \dot F} = 1.$$

Перемножая члены в правой части (7.76) и учитывая соотношение (7.71), имеем

$$\nabla_k \sigma^{i}_{C\dot D} - T_{CEk}\sigma^{iE}_{\dot D} - \sigma^{i\dot F}_{C} T^{+}_{\dot D \dot F k} = 0, \tag{7.77}$$

или

$$\nabla_k \sigma^{i}_{C\dot D} - T_{kCE}\sigma^{Ei}_{\dot D} - \sigma^{i}_{C\dot F} T^{+\dot F}_{k\dot D}\ . \tag{7.78}$$

Альтернируя это соотношение по индексам $k$ и $i$, получим уравнения (7.74).

Вторые тождества Бианки $(D)$ геометрии $A_4$ в спинорном $\Delta$-базисе расщепляются на следующие уравнения:

$$\nabla^n \overset{*}{R}_{ACkn} - \overset{*}{R}_{ECkn}\, T^{E}{}_{A}{}^{n} + \overset{*}{R}_{EAkn}\, T^{E}{}_{C}{}^{n} = 0, \tag{7.79}$$

$$\nabla^n \overset{*}{R}{}^{+}_{\dot B \dot D kn} - \overset{*}{R}{}^{+}_{\dot F \dot D kn} T^{+\dot F n}_{\dot B} + \overset{*}{R}{}^{+}_{\dot F \dot B kn} T^{+\dot F n}_{\dot D} = 0. \tag{7.80}$$

*Доказательство.* Поднимая и опуская с помощью метрических тензоров $\eta_{ab}$ и $g_{ik}$ тензорные индексы в тождествах (6.128), запишем их в виде

$$\nabla^n \overset{*}{R}_{abkn} - \overset{*}{R}_{cbkn}\, T^{c}{}_{a}{}^{n} + \overset{*}{R}_{ackn}\, T^{c}{}_{b}{}^{n} = 0. \tag{7.81}$$

Переходя в этом равенстве к спинорным индексам с помощью соотношений (7.31) и (7.32), имеем

$$\nabla^n \overset{*}{R}_{A\dot B C\dot D kn} - \overset{*}{R}_{E\dot F C\dot D kn}\, T^{\dot E F}{}_{A\dot B}{}^{n} + \overset{*}{R}_{E\dot F A\dot B kn}\, T^{\dot E F}{}_{C\dot D}{}^{n} = 0. \tag{7.82}$$

Запишем это соотношение в виде

$$D^{n}_{A\dot B C\dot D kn} = 0, \tag{7.83}$$

где через $D^{n}_{A\dot B C\dot D kn}$ обозначено все, что стоит в левой части равенства (7.82). Используя антисимметрию соотношения (7.83) по паре индексов $A\dot B$ и $C\dot D$, запишем его в виде

$$D^{n}_{A\dot B C\dot D kn} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\dot B \dot D} D^{n}_{ACkn} + \varepsilon_{AC} D^{+n}{}_{\dot B \dot D kn}) = 0, \tag{7.84}$$

где

$$D^{n}_{ACkn} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot B \dot D} D^{n}_{A\dot B C\dot D kn} = 0,$$

$$D^{+n}_{\dot B \dot D kn} = \frac{1}{2}\varepsilon^{AC} D^{n}_{A\dot B C\dot D kn} = 0.$$

Подставляя сюда соотношение (7.82), получим равенства (7.79) и (7.80).

С физической точки зрения спинорное расщепление структурных уравнений Картана $(A)$ и $(B)$ означает расщепление на уравнения «материи» и «антиматерии», подобно тому как это было сделано П.Дираком при выводе уравнений для электрона и позитрона. Теперь мы можем записать уравнения, которые преобразуются по группе $SL^{+}(2.C)$ в виде

$$\nabla_{[k}\sigma^{i]}_{C\dot{D}} - T_{[k|CE}\sigma^{E}_{\dot{D}}|^{i]} - \sigma^{[i}{}_{|C\dot{F}|}T^{+}_{k]\dot{D}}{}^{\dot{F}} = 0, \qquad (A^{s})$$

$$R_{ACkn} + 2\nabla_{[k}T_{|AC|n]} + 2T_{AE[k}T^{E}_{|C|n]} = 0, \qquad ({B^{s}}^{+})$$

а по группе $SL^{-}(2.C)$ – как

$$\nabla_{[k}\sigma^{i]}{}_{C\dot{D}} - T_{[k|CE}\sigma^{E}_{\dot{D}}|^{i]} - \sigma^{[i}{}_{|C\dot{F}|}T^{+}_{k]\dot{D}}{}^{\dot{F}} = 0, \qquad (A^{s})$$

$$R^{+}_{\dot{B}\dot{D}kn} + 2\nabla_{[k}T^{+}_{|\dot{B}\dot{D}|n]} + 2T^{+}_{\dot{B}\dot{F}[k}T^{+\dot{F}}_{|\dot{D}|n]} = 0. \qquad ({B^{s}}^{-})$$

В буквенных обозначениях этих формул индекс $s$ указывает на преобразование по спинорной группе. Опуская матричные индексы, запишем эти соотношения в виде

$$\nabla_{[k}\sigma^{i]} - T_{[k}\sigma^{i]} - \sigma^{[i}T^{+}_{k]} = 0, \qquad (A^{s})$$

$$R_{kn} + 2\nabla_{[k}T_{n]} - [T_{k}, T_{n}] = 0, \qquad ({B^{s}}^{+})$$

$$\nabla_{[k}\sigma^{i]} - T_{[k}\sigma^{i]} - \sigma^{[i}T^{+}_{k]} = 0, \qquad (A^{s})$$

$$R^{+}_{kn} + 2\nabla_{[k}T^{+}_{n]} - [T^{+}_{k}, T^{+}_{n}] = 0. \qquad ({B^{s}}^{-})$$

Соответственно опуская матричные индексы в уравнениях (7.79) и (7.80), находим

$$\nabla^{n}\overset{*}{R}_{kn} + [\overset{*}{R}_{kn}, T^{n}] = 0, \qquad (D^{s}+)$$

$$\nabla^{n}\overset{*}{R}{}^{+}_{kn} + [\overset{*}{R}{}^{+}_{kn}, T^{+n}] = 0. \qquad (D^{s}-)$$

## 7.4 Матрицы Кармели. Запись структурных уравнений Картана геометрии $A_4$ в матрицах Кармели

Равенства (7.67) и (7.68) могут быть записаны в матричной форме

$$T_k = \xi \nabla_k \xi, \tag{7.85}$$

$$T_k^+ = \xi^+ \nabla_k \xi^+, \tag{7.86}$$

где $T_k$ и $\xi$ являются $2 \times 2$ комплексными матрицами с элементами $T^A{}_{Bk}$ и $\xi^a_A$ соответственно. Путем умножения $T_k$ на $\sigma^k{}_{A\dot{B}}$ можно ввести бесследовые $2 \times 2$ матрицы Кармели [49-51]

$$T_{A\dot{B}} = \sigma^k_{A\dot{B}} T_k, \tag{7.87}$$

$$A, C \ldots = 0, 1, \quad \dot{B}, \dot{D} \ldots = \dot{0}, \dot{1}$$

с компонентами

$$T_{0\dot{0}} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\kappa \\ \pi & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad T_{0\dot{1}} = \begin{pmatrix} \beta & -\sigma \\ \mu & -\beta \end{pmatrix},$$
$$T_{1\dot{0}} = \begin{pmatrix} \alpha & -\rho \\ \lambda & -\alpha \end{pmatrix}, \quad T_{1\dot{1}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\tau \\ \nu & -\gamma \end{pmatrix}. \tag{7.88}$$

С помощью матриц (7.87) можно определить матричные элементы

$$(T_{A\dot{B}})_C{}^D = \begin{array}{c|cccc} & & CD & & \\ A\dot{B} & 00 & 01 & 10 & 11 \\ \hline 0\dot{0} & \varepsilon & -\kappa & \pi & -\varepsilon \\ 0\dot{1} & \beta & -\sigma & \mu & -\beta \\ 1\dot{0} & \alpha & -\rho & \lambda & -\alpha \\ 1\dot{1} & \gamma & -\tau & \nu & -\gamma \end{array}, \tag{7.89}$$

где $(T_{A\dot{B}})_C{}^D$ является $CD$ – элементом матрицы $T_{A\dot{B}}$. Соответственно для комплексно сопряженных матриц $T^+{}_{\dot{A}B}$ имеем

$$(T^+_{\dot{A}B})^{\dot{D}}{}_{\dot{C}} = \begin{array}{c|cccc} & & \dot{C}\dot{D} & & \\ \dot{A}B & \dot{0}\dot{0} & \dot{0}\dot{1} & \dot{1}\dot{0} & \dot{1}\dot{1} \\ \hline \dot{0}0 & \overline{\varepsilon} & -\overline{\kappa} & \overline{\pi} & -\overline{\varepsilon} \\ \dot{0}1 & \overline{\beta} & -\overline{\sigma} & \overline{\mu} & -\overline{\beta} \\ \dot{1}0 & \overline{\alpha} & -\overline{\rho} & \overline{\lambda} & -\overline{\alpha} \\ \dot{1}1 & \overline{\gamma} & -\overline{\tau} & \overline{\nu} & -\overline{\gamma} \end{array}. \tag{7.90}$$

В матрицах Кармели первые структурные уравнения Картана $(A)$ геометрии $A_4$ имеют вид

$$\partial_{C\dot{D}} \sigma^i_{A\dot{B}} - \partial_{A\dot{B}} \sigma^i_{C\dot{D}} = (T_{C\dot{D}})_A{}^P \sigma^i_{P\dot{B}} + \sigma^i_{A\dot{R}} (T^+_{\dot{D}C})^{\dot{R}}{}_{\dot{B}} -$$
$$-(T_{A\dot{B}})_C{}^P \sigma^i_{P\dot{D}} - \sigma^i_{C\dot{R}} (T^+_{\dot{B}A})^{\dot{R}}{}_{\dot{D}}. \tag{7.91}$$

*Доказательство.* Запишем уравнения (7.75) в виде

$$\nabla_k \sigma^i_{C\dot{D}} - \nabla_k \sigma^i_{A\dot{B}} = T_C{}^E{}_k \sigma^i_{\dot{D}E} + \sigma^i_{C\dot{F}} T^{+\dot{F}}_{\dot{D}}{}_k - \\ -T_A{}^C{}_k \sigma^i_{C\dot{B}} - \sigma^i_{A\dot{E}} T^{+\dot{E}}_{\dot{B}}{}_k. \qquad (7.92)$$

Легко заметить, что уравнения (7.92) представляют собой разность двух соотношений:

$$\nabla_k \sigma^i_{C\dot{D}} = T_C{}^E{}_k \sigma^i_{\dot{D}E} + \sigma^i_{C\dot{F}} T^{+\dot{F}}_{\dot{D}}{}_k, \qquad (7.93)$$

$$\nabla_k \sigma^i_{A\dot{B}} = T_A{}^C{}_k \sigma^i_{C\dot{B}} + \sigma^i_{A\dot{E}} T^{+\dot{E}}_{\dot{B}}{}_k. \qquad (7.94)$$

Умножая (7.93) на $\sigma^k{}_{A\dot{B}}$, а соотношение (7.94) на $\sigma^k{}_{C\dot{D}}$, имеем

$$\nabla_k \sigma^i_{C\dot{D}} \sigma^k_{A\dot{B}} = T_C{}^E{}_k \sigma^i_{\dot{D}E} \sigma^k_{A\dot{B}} + \sigma^i_{C\dot{F}} T^{+\dot{F}}_{\dot{D}}{}_k \sigma^k_{A\dot{B}}, \qquad (7.95)$$

$$\nabla_k \sigma^i_{A\dot{B}} \sigma^k_{C\dot{D}} = T_A{}^P{}_k \sigma^i_{P\dot{B}} \sigma^k_{C\dot{D}} + \sigma^i_{A\dot{E}} T^{+\dot{E}}_{\dot{B}}{}_k \sigma^k_{C\dot{D}}. \qquad (7.96)$$

Вводя обозначения

$$(T_{A\dot{B}})_C{}^E = T_C{}^E{}_k \sigma^k_{A\dot{B}} \qquad (7.97)$$

и

$$\partial_{A\dot{B}} = \sigma^k_{A\dot{B}} \nabla_k, \qquad (7.98)$$

перепишем соотношения (7.95) и (7.96) в виде

$$\partial_{C\dot{D}} \sigma^i_{A\dot{B}} = (T_{C\dot{D}})_A{}^P \sigma^i_{P\dot{B}} + \sigma^i_{A\dot{R}} (T^+_{\dot{D}C})^{\dot{R}}{}_{\dot{B}}, \qquad (7.99)$$

$$\partial_{A\dot{B}} \sigma^i_{C\dot{D}} = (T_{A\dot{B}})_C{}^P \sigma^i_{P\dot{D}} + \sigma^i_{C\dot{R}} (T^+_{\dot{B}A})^{\dot{R}}{}_{\dot{D}}. \qquad (7.100)$$

Вычитая из (7.99) равенство (7.100), получим первые структурные уравнения Картана (7.91) геометрии $A_4$, записанные в матрицах Кармели.

Рассмотрим теперь вторые структурные уравнения Картана $(B^{s+})$, записанные в матричном виде

$$R_{kn} + 2\nabla_{[k} T_{n]} - [T_k, T_n] = 0. \qquad (7.101)$$

Умножая величину $R_{kn}$ на $\sigma^k{}_{A\dot{B}}$ и $\sigma^n{}_{C\dot{D}}$, введем бесследовую матрицу Кармели

$$R_{A\dot{B}C\dot{D}} = R_{kn} \sigma^k_{A\dot{B}} \sigma^n_{C\dot{D}} \qquad (7.102)$$

с компонентами [44-46]:

$$\begin{gathered}
R_{0\dot{1}0\dot{0}} = \begin{pmatrix} \Psi_1 & -\Psi_0 \\ \Psi_2 + 2\Lambda & -\Psi_1 \end{pmatrix}, \quad R_{1\dot{0}0\dot{0}} = \begin{pmatrix} \Phi_{10} & -\Phi_{00} \\ \Phi_{20} & -\Phi_{10} \end{pmatrix}, \\
R_{1\dot{1}1\dot{0}} = \begin{pmatrix} \Psi_3 & -\Psi_2 - 2\Lambda \\ \Psi_4 & -\Psi_3 \end{pmatrix}, \quad R_{1\dot{1}0\dot{1}} = \begin{pmatrix} \Phi_{12} & -\Phi_{02} \\ \Phi_{22} & -\Phi_{12} \end{pmatrix}, \\
R_{1\dot{1}0\dot{0}} = \begin{pmatrix} \Psi_2 + \Phi_{11} - \Lambda & -\Psi_1 - \Phi_{01} \\ \Psi_3 + \Phi_{21} & -\Psi_2 - \Phi_{11} + \Lambda \end{pmatrix}, \\
R_{1\dot{0}0\dot{1}} = \begin{pmatrix} -\Psi_2 + \Phi_{11} + \Lambda & \Psi_1 - \Phi_{01} \\ -\Psi_3 + \Phi_{21} & \Psi_2 - \Phi_{11} - \Lambda \end{pmatrix}.
\end{gathered} \qquad (7.103)$$

В спинорных матрицах Кармели (7.87) и (7.102) вторые структурные уравнения Картана ($B^{s+}$) геометрии $A_4$ запишутся как

$$
\begin{aligned}
R_{A\dot{B}C\dot{D}} = \partial_{C\dot{D}}T_{A\dot{B}} - \partial_{A\dot{B}}T_{C\dot{D}} - (T_{C\dot{D}})_A{}^F T_{F\dot{B}} - \\
-(T^{+}_{\dot{D}C})^{\dot{F}}{}_{\dot{B}}T_{A\dot{F}} + (T_{A\dot{B}})_C{}^F T_{F\dot{D}} + \\
+(T^{+}_{\dot{B}A})^{\dot{F}}{}_{\dot{D}}T_{C\dot{F}} + `[T_{A\dot{B}}, T_{C\dot{D}}].
\end{aligned}
\tag{7.104}
$$

*Доказательство.* Запишем уравнения (7.101) в виде

$$
R_{kn} = 2\nabla_{[n}T_{k]} + [T_k, T_n],
\tag{7.105}
$$

или

$$
R_{kn} = \nabla_n T_k - \nabla_k T_n + T_k T_n - T_n T_k.
\tag{7.106}
$$

Умножая это равенство на $\sigma^k{}_{A\dot{B}}\sigma^n{}_{C\dot{D}}$, получим

$$
\begin{aligned}
R_{A\dot{B}C\dot{D}} = \partial_{C\dot{D}}T_k\sigma^k_{A\dot{B}} - \partial_{A\dot{B}}T_n\sigma^n_{C\dot{D}} + T_{A\dot{B}}T_{C\dot{D}} - T_{C\dot{D}}T_{A\dot{B}} = \\
= \partial_{C\dot{D}}T_{A\dot{B}} - \partial_{AB}T_{C\dot{D}} - (\partial_{C\dot{D}}\sigma_{A\dot{B}}{}^k - \partial_{A\dot{B}}\sigma_{C\dot{D}}{}^k)T_k + \\
+[T_{A\dot{B}}, T_{C\dot{D}}].
\end{aligned}
\tag{7.107}
$$

Здесь мы использовали условие

$$
\sigma_k{}^{A\dot{B}}\sigma^k_{C\dot{E}} = \delta^A_C\delta^{\dot{B}}_{\dot{E}}
\tag{7.108}
$$

и обозначение

$$
\partial_{A\dot{B}} = \sigma^k_{A\dot{B}}\nabla_k.
\tag{7.109}
$$

Если теперь учесть в равенстве (7.107) соотношения (7.99) и (7.100), то мы получим уравнения (7.103).

Запишем вторые тождества Бианки ($D^{s+}$) геометрии $A_4$ в матричном виде

$$
\nabla^n \overset{*}{R}_{kn} + [\overset{*}{R}_{kn}, T^n] = 0.
\tag{7.110}
$$

Умножая эти уравнения на $\sigma^n{}_{E\dot{F}}$, получим их запись через матрицы Кармели в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
\partial^{C\dot{D}} \overset{*}{R}_{E\dot{F}C\dot{D}} + \sigma^n_{\dot{E}F}(\nabla^{C\dot{D}}\sigma^{A\dot{B}}_n) \overset{*}{R}_{A\dot{B}C\dot{D}} + \\
+(\nabla_k\sigma^{kC\dot{D}}) \overset{*}{R}_{E\dot{F}C\dot{D}} - [T^{C\dot{D}}, \overset{*}{R}_{E\dot{F}C\dot{D}}] = 0.
\end{aligned}
\tag{7.111}
$$

Используя соотношение (7.99), можно переписать тождества (7.111) как

$$
\begin{aligned}
\partial^{C\dot{D}} \overset{*}{R}_{E\dot{F}C\dot{D}} - (T^{C\dot{D}})^A{}_E \overset{*}{R}_{A\dot{F}C\dot{D}} - \\
-(T^{+\dot{D}C})_{\dot{F}}{}^{\dot{B}} \overset{*}{R}_{E\dot{B}C\dot{D}} + (T_P{}^{\dot{D}})^{CP} \overset{*}{R}_{E\dot{F}C\dot{D}} + \\
+(T^{+C}_{\dot{Q}})^{\dot{Q}\dot{D}} \overset{*}{R}_{E\dot{F}C\dot{D}} + [T^{C\dot{D}}, \overset{*}{R}_{E\dot{F}C\dot{D}}] = 0.
\end{aligned}
\tag{7.112}
$$

## 7.5 Покомпонентная запись структурных уравнений Картана геометрии $A_4$

Распишем теперь уравнения (7.91) покомпонентно. Для удобства введем следующее обозначение:

$$A^i_{C\dot{D}A\dot{B}} = \partial_{C\dot{D}}\sigma^i_{A\dot{B}} - \partial_{A\dot{B}}\sigma^i_{C\dot{D}} = (T_{C\dot{D}})_A{}^P\sigma^i_{P\dot{B}} + \\ +\sigma^i_{A\dot{R}}(T^+_{\dot{D}C})^{\dot{R}}{}_{\dot{B}} - (T_{A\dot{B}})_C{}^P\sigma^i_{P\dot{D}} - \sigma^i_{C\dot{R}}(T^+_{\dot{B}A})^{\dot{R}}{}_{\dot{D}}. \tag{7.113}$$

Кроме того, компоненты спинорной производной обозначим как

$$\partial_{A\dot{B}} = \begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{\dot{B}} \\ A & \dot{0} & \dot{1} \\ \hline 0 & D & \delta \\ 1 & \overline{\delta} & \Delta \end{array}, \tag{7.114}$$

а компоненты спинорного $\Delta$-базиса в виде

$$\sigma^i_{A\dot{B}} = \begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{\dot{B}} \\ A & \dot{0} & \dot{1} \\ \hline 0 & l^i = (Y^0, V, Y^2, Y^3) & m^i = (\xi^0, \omega, \xi^2, \xi^3) \\ 1 & \overline{m}^i = (\overline{\xi}^0, \overline{\omega}, \overline{\xi}^2, \overline{\xi}^3) & n^i = (X^\circ, U, X^2, X^3) \end{array}. \tag{7.115}$$

Для спинорной компоненты $A^i{}_{0\dot{0}0\dot{1}}$ из равенства (7.113) следует

$$A^i_{0\dot{0}0\dot{1}} = \partial_{0\dot{0}}\sigma^i_{0\dot{1}} - \partial_{0\dot{1}}\sigma^i_{0\dot{0}} = (T_{0\dot{0}})_0{}^P\sigma^i_{P\dot{1}} + \sigma^i_{0\dot{R}}(T^+_{\dot{0}0})^{\dot{R}}{}_{\dot{1}} - \\ -(T_{0\dot{1}})_0{}^P\sigma^i_{P\dot{0}} - \sigma^i_{0\dot{R}}(T^+_{\dot{1}0})^{\dot{R}}{}_{\dot{0}} \tag{7.116}$$

или

$$A^i_{0\dot{0}0\dot{1}} = \partial_{0\dot{0}}\sigma^i_{0\dot{1}} - \partial_{0\dot{1}}\sigma^i_{0\dot{0}} = \left((T_{0\dot{0}})_0{}^0\sigma^i_{0\dot{1}} + (T_{0\dot{0}})_0{}^1\sigma^i_{1\dot{1}}\right) + \\ + \left(\sigma^i_{0\dot{0}}(T^+_{\dot{0}0})^{\dot{0}}{}_{\dot{1}} + \sigma^i_{0\dot{1}}(T^+_{\dot{0}0})^{\dot{1}}{}_{\dot{1}}\right) - \left((T_{0\dot{1}})_0{}^0\sigma^i_{0\dot{0}} + (T_{0\dot{1}})_0{}^1\sigma^i_{1\dot{0}}\right) - \\ - \left(\sigma^i_{0\dot{0}}(T^+_{\dot{1}0})^{\dot{0}}{}_{\dot{0}} + \sigma^i_{0\dot{1}}(T^+_{\dot{1}0})^{\dot{1}}{}_{\dot{0}}\right). \tag{7.117}$$

Используя обозначения (7.89), (7.90), (7.114) и (7.115) для компонент $(T_{C\dot{D}})_A{}^P, (T^+_{\dot{B}A})^{\dot{R}}{}_{\dot{D}}, \partial_{A\dot{B}}$ и $\sigma^i_{A\dot{B}}$, получим из уравнений (7.117)

$$Dm^i - \delta l^i = \left(\varepsilon m^i + (-\kappa)n^i\right) + \left(l^i\overline{\pi} + m^i(-\overline{\varepsilon})\right) - \\ - \left(\beta l^i + (-\sigma)\overline{m}^i\right) - \left(l^i\overline{\alpha} + m^i(-\overline{\rho})\right) = \\ = -(\overline{\alpha} + \beta - \overline{\pi})l^i - \kappa n^i + \sigma\overline{m}^i + (\overline{\rho} + \varepsilon - \overline{\varepsilon})m^i. \tag{7.118}$$

Поскольку вектора $m^i$ и $l^i$ имеют следующие компоненты:

$$l^i = (Y^0, V, Y^2, Y^3), \quad m^i = (\xi^0, \omega, \xi^2, \xi^3),$$

то из уравнений (7.118) вытекает

$$\delta V - D\omega = (\overline{\alpha} + \beta - \overline{\pi})V + \kappa U - \sigma\overline{\omega} - (\overline{\rho} + \varepsilon - \overline{\varepsilon})\omega, \tag{7.119}$$

$$\delta Y^{\alpha} - D\xi^{\alpha} = (\overline{\alpha} + \beta - \overline{\pi})Y^{\alpha} + \kappa X^{\alpha} - \alpha\overline{\xi}^{\alpha} - (\overline{\rho} + \varepsilon - \overline{\varepsilon})\xi^{\alpha}, \tag{7.120}$$

$$\alpha = 0, 2, 3.$$

Действуя подобным образом, находим следующую покомпонентную запись первых структурных уравнений Картана геометрии $A_4$

$$\delta V - D\omega = (\overline{\alpha} + \beta - \overline{\pi})V + \kappa U - \sigma\overline{\omega} - (\overline{\rho} + \varepsilon - \overline{\varepsilon})\omega, \tag{A.1}$$

$$\delta Y^{\alpha} - D\xi^{\alpha} = (\overline{\alpha} + \beta - \overline{\pi})Y^{\alpha} + \kappa X^{\alpha} - \sigma\overline{\xi}^{\alpha} - (\overline{\rho} + \varepsilon - \overline{\varepsilon})\xi^{\alpha}, \tag{A.2}$$

$$\Delta Y^{\alpha} - DX^{\alpha} = (\gamma + \overline{\gamma})Y^{\alpha} + (\varepsilon + \overline{\varepsilon})X^{\alpha} - (\tau + \overline{\pi})\xi^{\alpha} - (\overline{\tau} + \pi)\omega, \tag{A.3}$$

$$\Delta V - DV = (\gamma + \overline{\gamma})V + (\varepsilon + \overline{\varepsilon})U - (\tau + \overline{\pi})\overline{\omega} - (\overline{\tau} + \pi)\omega, \tag{A.4}$$

$$\delta U - \Delta\omega = -\overline{\nu}V + (\tau - \overline{\alpha} - \beta)U + \overline{\lambda\omega} + (\mu - \gamma + \overline{\gamma})\omega, \tag{A.5}$$

$$\delta X^{\alpha} - \Delta\xi^{\alpha} = -\overline{\nu}Y^{\alpha} + (\tau - \overline{\alpha} - \beta)X^{\alpha} + \overline{\lambda\xi}^{\alpha} + (\mu - \gamma + \overline{\gamma})\xi^{\alpha}, \tag{A.6}$$

$$\overline{\delta}\omega - \delta\overline{\omega} = (\overline{\mu} - \mu)V + (\overline{\rho} - \rho)U - (\overline{\alpha} - \beta)\overline{\omega} - (\overline{\beta} - \alpha)\omega, \tag{A.7}$$

$$\overline{\delta}\xi^{\alpha} - \delta\overline{\xi}^{\alpha} = (\overline{\mu} - \mu)Y^{\alpha} + (\overline{\rho} - \rho)X^{\alpha} - (\overline{\alpha} - \beta)\overline{\xi}^{\alpha} - (\overline{\beta} - \alpha)\xi^{\alpha}, \tag{A.8}$$

$$\alpha = 0, 2, 3,$$

плюс комплексно сопряженные уравнения ($\overline{A}$.1) – ($\overline{A}$.8) (всего 24 независимых уравнения).

Обратимся теперь к уравнениям (7.107) и запишем их покомпонентно. Вычислим, например, $R_{0\mathrm{i}0\dot{0}}$ компоненту этих уравнений

$$\begin{aligned} R_{0\mathrm{i}0\dot{0}} \;=\; & \partial_{0\dot{0}}T_{0\mathrm{i}} - \partial_{0\mathrm{i}}T_{0\dot{0}} - (T_{0\dot{0}})_{0}{}^{0}T_{0\mathrm{i}} - (T_{0\dot{0}})_{0}{}^{1}T_{1\mathrm{i}} + \\ & +(T^{+}_{0\dot{0}})^{\dot{0}}{}_{\mathrm{i}}T_{0\dot{0}} - (T^{+}_{0\dot{0}})^{\mathrm{i}}{}_{\mathrm{i}}T_{0\mathrm{i}} + (T_{0\mathrm{i}})_{0}{}^{0}T_{0\dot{0}} + (T_{0\mathrm{i}})_{0}{}^{1}T_{1\dot{0}} + \\ & +(T^{+}_{1\dot{0}})^{\dot{0}}{}_{\dot{0}}T_{0\dot{0}} + (T^{+}_{1\dot{0}})^{\mathrm{i}}{}_{\dot{0}}T_{0\mathrm{i}} + T_{0\mathrm{i}}T_{0\dot{0}} - T_{0\dot{0}}T_{1\dot{0}}. \end{aligned} \tag{7.121}$$

Используя матрицы (7.89), (7.90), (7.103) и спинорную производную (7.114), можно представить (7.121) в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Psi_1 & -\Psi_0 \\ \Psi_2 + 2\Lambda & -\Psi_1 \end{pmatrix} &= D\begin{pmatrix} \beta & -\sigma \\ \mu & -\beta \end{pmatrix} -\delta\begin{pmatrix} \varepsilon & -\kappa \\ \pi & -\varepsilon \end{pmatrix} - \\ &- \varepsilon\begin{pmatrix} \beta & -\sigma \\ \mu & -\beta \end{pmatrix} +\kappa\begin{pmatrix} \gamma & -\tau \\ \nu & -\gamma \end{pmatrix} -\overline{\pi}\begin{pmatrix} \varepsilon & -\kappa \\ \pi & -\varepsilon \end{pmatrix} + \\ &+ \overline{\varepsilon}\begin{pmatrix} \beta & -\sigma \\ \mu & -\beta \end{pmatrix} +\beta\begin{pmatrix} \varepsilon & -\kappa \\ \pi & -\varepsilon \end{pmatrix} -\sigma\begin{pmatrix} \alpha & -\rho \\ \lambda & -\alpha \end{pmatrix} + \\ &+ \overline{\alpha}\begin{pmatrix} \varepsilon & -\kappa \\ \pi & -\varepsilon \end{pmatrix} - \overline{\rho}\begin{pmatrix} \beta & -\sigma \\ \mu & -\beta \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \beta & -\sigma \\ \mu & -\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon & -\kappa \\ \pi & -\varepsilon \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon & -\kappa \\ \pi & -\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & -\sigma \\ \mu & -\beta \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.122}$$

Эти матричные уравнения распадаются на следующие три независимых уравнения:

$$(D-\overline{\rho}+\overline{\varepsilon})\beta-(\delta-\overline{\alpha}+\overline{\pi})\varepsilon-(\alpha+\pi)\sigma+(\mu+\gamma)\kappa-\Psi_1=0,$$
$$(D-\rho-\overline{\rho}-3\varepsilon+\overline{\varepsilon})\sigma-(\delta-\tau+\overline{\pi}-\overline{\alpha}-3\beta)\kappa-\Psi_0=0,$$
$$(D-\overline{\rho}+\varepsilon+\overline{\varepsilon})\mu-(\delta+\overline{\pi}-\overline{\alpha}+\beta)\pi-\sigma\lambda+\nu\kappa-2\Lambda-\Psi_2=0.$$

Действуя подобным образом, получим следующие независимые уравнения $(B^{s+})$

$$(D-\rho-\varepsilon-\overline{\varepsilon})\rho-(\overline{\delta}-3\alpha-\overline{\beta}+\pi)\kappa-$$
$$-\sigma\overline{\sigma}+\tau\overline{\kappa}-\Phi_{00}=0, \qquad (B^{s^+}.1)$$
$$(D-\rho-\overline{\rho}-3\varepsilon+\overline{\varepsilon})\sigma-(\delta-\tau+\overline{\pi}-\overline{\alpha}-3\beta)\kappa-$$
$$-\Psi_0=0, \qquad (B^{s^+}.2)$$
$$(D-\rho-\varepsilon+\overline{\varepsilon})\tau-(\Delta-3\gamma-\overline{\gamma})\kappa-\rho\overline{\pi}-\sigma\overline{\tau}-\pi\sigma-$$
$$-\Psi_1-\Phi_{10}=0, \qquad (B^{s^+}.3)$$
$$(D-\rho-\overline{\varepsilon}+2\varepsilon)\alpha-(\overline{\delta}-\overline{\beta}+\pi)\varepsilon-\beta\overline{\sigma}+\kappa\lambda+\overline{\kappa}\gamma-$$
$$-\pi\rho-\Phi_{10}=0, \qquad (B^{s^+}.4)$$
$$(D+\varepsilon+\overline{\varepsilon})\gamma-(\Delta-\gamma-\overline{\gamma})\varepsilon-(\tau+\overline{\pi})\alpha-(\pi+\overline{\tau})\beta-$$
$$-\pi\tau+\nu\kappa+\Lambda-\Psi_2-\Phi_{11}=0, \qquad (B^{s^+}.5)$$
$$(D-\rho+3\varepsilon-\overline{\varepsilon})\lambda-(\overline{\delta}+\pi+\alpha-\overline{\beta})\pi-\mu\overline{\sigma}+\nu\overline{\kappa}-\Phi_{20}=0, \qquad (B^{s^+}.6)$$
$$(D-\overline{\rho}+\overline{\varepsilon})\beta-(\delta-\overline{\alpha}+\overline{\pi})\varepsilon-(\alpha+\pi)\sigma+(\mu+\gamma)\kappa-$$
$$-\Psi_1=0, \qquad (B^{s^+}.7)$$
$$(D-\overline{\rho}+\varepsilon+\overline{\varepsilon})\mu-(\delta+\overline{\pi}-\overline{\alpha}+\beta)\pi-\sigma\lambda+\nu\kappa-$$
$$-2\Lambda-\Psi_2=0, \qquad (B^{s^+}.8)$$
$$(D+3\varepsilon+\overline{\varepsilon})\nu-(\Delta+\mu+\gamma-\overline{\gamma})\pi-\mu\overline{\tau}-(\overline{\pi}+\tau)\lambda-$$
$$-\Psi_3-\Phi_{21}=0, \qquad (B^{s^+}.9)$$
$$(\Delta+\mu+\overline{\mu}+3\gamma-\overline{\gamma})\lambda-(\overline{\delta}+3\alpha+\overline{\beta}+\pi-\overline{\tau})\nu+\Psi_4=0, \qquad (B^{s^+}.10)$$
$$(\delta-\overline{\alpha}-\beta-\tau)\rho-(\delta-3\alpha+\overline{\beta})\sigma+\tau\overline{\rho}-(\mu-\overline{\mu})\kappa+$$
$$+\Psi_1-\Phi_{01}=0, \qquad (B^{s^+}.11)$$
$$(\delta-\overline{\alpha}+2\beta)\alpha-(\overline{\delta}+\overline{\beta})\beta-\mu\rho+\sigma\lambda-(\rho-\overline{\rho})\gamma-$$
$$-(\mu-\overline{\mu})\varepsilon-\Lambda+\Psi_2-\Phi_{11}=0, \qquad (B^{s^+}.12)$$
$$(\delta-\overline{\alpha}+3\beta)\lambda-(\overline{\delta}+\pi+\alpha+\overline{\beta})\mu-(\rho-\overline{\rho})\nu+$$
$$+\pi\overline{\mu}+\Psi_3-\Phi_{21}=0, \qquad (B^{s^+}.13)$$

$$(\delta - \tau + \overline{\alpha} + \beta)\gamma - (\Delta - \gamma + \overline{\gamma} + \mu)\beta - \mu\tau + \sigma\nu +$$
$$+\varepsilon\overline{\nu} - \alpha\overline{\lambda} - \Phi_{12} = 0, \qquad (B^{s^+}.14)$$
$$(\delta - \tau + 3\beta + \overline{\alpha})\nu - (\Delta + \mu + \gamma + \overline{\gamma})\mu - \lambda\overline{\lambda} +$$
$$+\pi\overline{\nu} - \Phi_{22} = 0, \qquad (B^{s^+}.15)$$
$$(\delta - \tau - \beta + \overline{\alpha})\tau - (\Delta + \mu - 3\gamma + \overline{\gamma})\sigma - \overline{\lambda}\rho +$$
$$+\kappa\overline{\nu} - \Phi_{02} = 0, \qquad (B^{s^+}.16)$$
$$(\Delta + \overline{\mu} - \gamma - \overline{\gamma})\rho - (\overline{\delta} + \overline{\beta} - \alpha - \overline{\tau})\tau + \sigma\lambda -$$
$$-\nu\kappa + 2\Lambda + \Psi_2 = 0, \qquad (B^{s^+}.17)$$
$$(\Delta - \overline{\gamma} + \overline{\mu})\alpha - (\overline{\delta} + \overline{\beta} - \overline{\tau})\gamma - (\rho + \varepsilon)\nu +$$
$$+(\tau + \beta)\lambda + \Psi_3 = 0. \qquad (B^{s^+}.18)$$

Кроме этих уравнений, вторые структурные уравнения Картана $(B)$ включают в себя комплексно сопряженные уравнения

$$R^{+}_{kn} + 2\nabla_{[k}T^{+}_{n]} - [T^{+}_{k}, T^{+}_{n}] = 0. \qquad (B^{s^-})$$

Покомпонентную запись этих уравнений можно получить путем замены уравнений $(B^{s^+}.1)$–$(B^{s^+}.18)$ на комплексно сопряженные уравнения.

## 7.6 Связь структурных уравнений Картана геометрии $A_4$ с формализмом Ньюмена–Пенроуза

В 1962 г. Э. Ньюмен и Р. Пенроуз [30] предложили систему нелинейных спинорных уравнений, которая оказалась очень удобной для поиска новых решений уравнений Эйнштейна. В работе автора [52] было показано, что уравнения формализма Ньюмена–Пенроуза совпадают со структурными уравнениями Картана геометрии абсолютного параллелизма. Действительно, со спинорными матрицами Кармели $T_{C\dot{D}}$ можно связать спин-тензор $T_{FAC\dot{D}}$ с помощью соотношения

$$(T_{C\dot{D}})_A{}^P = T_A{}^P{}_k \sigma^k{}_{C\dot{D}} = T^P{}_{AC\dot{D}} = -\varepsilon^{PF} T_{FAC\dot{D}}. \qquad (7.123)$$

Используя матричные элементы (7.162) матриц Кармели и фундаментальный спинор

$$\varepsilon^{AB} = \varepsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

получим следующие обозначения для компонент спин-тензора $T_{ABC\dot{D}}$

$$T_{ABC\dot{D}} = \begin{array}{c|cccc} & & C\dot{D} & & \\ AB & 0\dot{0} & 0\dot{1} & 1\dot{0} & 1\dot{1} \\ \hline 00 & \kappa & \sigma & \rho & \tau \\ (01) & \varepsilon & \beta & \alpha & \gamma \\ 11 & \pi & \mu & \lambda & \nu \end{array}. \qquad (7.124)$$

Первые структурные уравнения Картана геометрии $A_4$ совпадают с «координатными уравнениями» [30]

$$\partial_{A\dot{B}}\sigma^{i}{}_{C\dot{D}} - \partial_{C\dot{D}}\sigma^{i}{}_{A\dot{B}} = \varepsilon^{PQ}(T_{PAC\dot{D}}\sigma^{i}{}_{Q\dot{B}} - T_{PCA\dot{B}}\sigma^{i}{}_{Q\dot{D}}) + \\ +\varepsilon^{\dot{R}\dot{S}}(\overline{T}_{\dot{R}\dot{B}\dot{D}C}\sigma^{i}{}_{A\dot{S}} - \overline{T}_{\dot{R}\dot{D}\dot{B}A}\sigma^{i}{}_{C\dot{S}}) \qquad (7.125)$$

в формализме Ньюмена–Пенроуза.

*Доказательство.* Запишем структурные уравнения Картана $(A)$ геометрии абсолютного параллелизма в виде

$$\partial_{C\dot{D}}\sigma^{i}{}_{A\dot{B}} - \partial_{A\dot{B}}\sigma^{i}{}_{C\dot{D}} = (T_{C\dot{D}})_{A}{}^{P}\sigma^{i}{}_{P\dot{B}} + \sigma^{i}{}_{A\dot{R}}(T^{+}_{\dot{D}C})^{\dot{R}}{}_{\dot{B}} - \\ -(T_{A\dot{B}})_{C}{}^{P}\sigma^{i}{}_{P\dot{D}} - \sigma^{i}{}_{C\dot{R}}(T^{+}_{\dot{B}A})^{\dot{R}}{}_{\dot{D}}. \qquad (7.126)$$

Используя соотношение (7.123), представим уравнения (7.126) в виде

$$\partial_{C\dot{D}}\sigma^{i}{}_{A\dot{B}} - \partial_{A\dot{B}}\sigma^{i}{}_{C\dot{D}} = -\left(\varepsilon^{PQ}(T_{PAC\dot{D}}\sigma^{i}{}_{Q\dot{B}} - T_{PCA\dot{B}}\sigma^{i}{}_{Q\dot{D}}) + \right. \\ \left. +\ \varepsilon^{\dot{R}\dot{S}}(\overline{T}_{\dot{R}\dot{B}\dot{D}C}\sigma^{i}{}_{A\dot{S}} - \overline{T}_{\dot{R}\dot{D}\dot{B}A}\sigma^{i}{}_{C\dot{S}})\right).$$

Легко заметить, что эти уравнения эквивалентны уравнениям (7.125).

Запишем известное разложение тензора Римана $R_{ijkm}$ на неприводимые представления

$$R_{ijkm} = C_{ijkm} - 2g_{[i[k}R_{m]j]} - \frac{1}{3}Rg_{i[m}g_{k]j}, \qquad (7.127)$$

где $C_{ijkm}$ – тензор Вейля (10 независимых компонент), $R_{ij}$ – тензор Риччи (девять независимых компонент), $R$ – скалярная кривизна. Спинорное представление этих величин имеет вид [53]

$$C_{ijkm} \leftrightarrow \Psi_{ABCD}\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} + \varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\overline{\Psi}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}, \qquad (7.128)$$

$$R_{ij} \leftrightarrow 2\Phi_{AB\dot{A}\dot{B}} + 6\varepsilon_{AB}\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}, \qquad (7.129)$$

$$R = 24\Lambda, \qquad (7.130)$$

где спиноры $\Psi_{ABCD}$ и $\Phi_{AB\dot{A}\dot{B}}$ удовлетворяют следующим свойствам симметрии:

$$\Psi_{ABCD} = \Psi_{(ABCD)}, \quad \Phi_{AB\dot{A}\dot{B}} = \Phi_{(AB)\dot{A}\dot{B}}. \qquad (7.131)$$

По определению спиноры $\Psi_{ABCD}$ и $\Phi_{AB\dot{A}\dot{B}}$ преобразуются соответственно по $D(2.0)$ и $D(1.1)$ неприводимому представлению группы $SL^{+}(2.C)$.

Если теперь сопоставить с тензором Римана $R_{ijkm}$ спин-тензор по правилу

$$R_{ijkm} \leftrightarrow R_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}D\dot{D}},$$

то через спиноры (7.128)–(7.130) его можно записать как

$$
\begin{aligned}
R_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}D\dot{D}} = \Psi_{ABCD}\,\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} + \varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\overline{\Psi}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} &+ \\
+\Phi_{AB\dot{C}\dot{D}}\varepsilon_{CD}\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} + \overline{\Phi}_{CD\dot{A}\dot{B}}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} &+ \\
+2\Lambda(\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD}\varepsilon_{\dot{A}\dot{D}}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} &+ \\
+\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\varepsilon_{\dot{A}\dot{D}}\varepsilon_{\dot{B}\dot{C}}). &
\end{aligned} \tag{7.132}
$$

Используя антисимметрию этого спин-тензора по паре индексов $A\dot{A}$ и $B\dot{B}$, запишем его в виде

$$
R_{A\dot{E}C\dot{B}D\dot{P}F\dot{Q}} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\dot{E}\dot{B}}R_{ACD\dot{P}F\dot{Q}} + \varepsilon_{AC}\overline{R}_{\dot{E}\dot{B}D\dot{P}F\dot{Q}}), \tag{7.133}
$$

где

$$
R_{ACD\dot{P}F\dot{Q}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{E}\dot{B}}R_{A\dot{E}C\dot{B}D\dot{P}F\dot{Q}}, \tag{7.134}
$$

$$
\overline{R}_{\dot{E}\dot{B}D\dot{P}F\dot{Q}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{AC}R_{A\dot{E}C\dot{B}D\dot{P}F\dot{Q}}. \tag{7.135}
$$

Подставляя в эти соотношения равенство (7.132), получим

$$
R_{ACD\dot{P}F\dot{Q}} = \Psi_{ACDF}\varepsilon_{\dot{P}\dot{Q}} + \Phi_{AC\dot{Q}\dot{P}}\varepsilon_{FD} + \Lambda\varepsilon_{\dot{P}\dot{Q}}(\varepsilon_{CD}\varepsilon_{AF} + \varepsilon_{AD}\varepsilon_{CF}), \tag{7.136}
$$

$$
\overline{R}_{\dot{E}\dot{B}D\dot{B}PQ} = \varepsilon_{DP}\overline{\Psi}_{\dot{E}\dot{B}\dot{P}\dot{Q}} + \overline{\Phi}_{\dot{B}\dot{E}PD}\varepsilon_{\dot{Q}\dot{P}} + \Lambda\varepsilon_{DP}(\varepsilon_{\dot{B}\dot{P}}\varepsilon_{\dot{E}\dot{Q}} + \varepsilon_{\dot{E}\dot{P}}\varepsilon_{\dot{B}\dot{Q}}). \tag{7.137}
$$

Вторые структурные уравнения Картана
($B^{s+}$) эквивалентны уравнениям [30]

$$
\begin{aligned}
\Psi_{ACDF}\varepsilon_{\dot{E}\dot{B}} + \Phi_{AC\dot{B}\dot{E}}\varepsilon_{FD} + \Lambda\varepsilon_{\dot{E}\dot{B}}(\varepsilon_{CD}\varepsilon_{AF} &+ \\
+\varepsilon_{AD}\varepsilon_{CF}) - \partial_{D\dot{B}}T_{ACF\dot{E}} + \partial_{F\dot{E}}T_{ACD\dot{B}} &+ \\
+\varepsilon^{PQ}(T_{APD\dot{B}}T_{QCF\dot{E}} + T_{ACP\dot{B}}T_{QDF\dot{E}} - T_{APF\dot{E}}T_{QCD\dot{B}} &- \\
-T_{ACP\dot{E}}T_{QFD\dot{B}}) &+ \\
+\varepsilon^{\dot{R}\dot{S}}(T_{ACD\dot{R}}\overline{T}_{\dot{S}\dot{B}\dot{E}F} - T_{ACF\dot{R}}\overline{T}_{\dot{S}\dot{E}\dot{B}D}) &= 0
\end{aligned} \tag{7.138}
$$

формализма Ньюмена–Пенроуза.

*Доказательство.* Запишем уравнения ($B^{s+}$) в матрицах Кармели

$$
\begin{aligned}
R_{F\dot{E}D\dot{B}} = \partial_{D\dot{B}}T_{F\dot{E}} - \partial_{F\dot{E}}T_{D\dot{B}} - (T_{D\dot{B}})_F{}^S T_{S\dot{B}} &- \\
-(T^{+}_{\dot{E}D})^{\dot{F}}{}_{\dot{B}}T_{F\dot{F}} + (T_{F\dot{E}})_D{}^S T_{S\dot{B}} &+ \\
+(T^{+}_{\dot{E}F})^{\dot{F}}{}_{\dot{B}}T_{D\dot{F}} + [T_{F\dot{E}}, T_{D\dot{B}}]. &
\end{aligned} \tag{7.139}
$$

Используя соотношение (7.123), представим уравнения (7.139) в виде

$$
\begin{aligned}
R_{ACF\dot{E}D\dot{B}} - \partial_{D\dot{B}}T_{ACE\dot{F}} + \partial_{E\dot{F}}T_{ACD\dot{B}} + T^S{}_{FD\dot{B}}T_{ACS\dot{E}} &+ \\
+\overline{T}^{\dot{F}}{}_{\dot{E}\dot{B}D}T_{ACF\dot{F}} - T^S{}_{DF\dot{E}}T_{ACS\dot{B}} - \overline{T}^{\dot{F}}{}_{\dot{B}\dot{E}F}T_{ACD\dot{F}} &+ \\
+\varepsilon^{PQ}(T_{APD\dot{B}}T_{QCF\dot{E}} - T_{APF\dot{E}}T_{QCD\dot{B}}) &= 0\,,
\end{aligned}
$$

или как

$$
\begin{aligned}
R_{ACF\dot{E}D\dot{B}} - \partial_{D\dot{B}}T_{ACE\dot{F}} + \partial_{E\dot{F}}T_{ACD\dot{B}} + \varepsilon^{PQ}(T_{APD\dot{B}}T_{QCF\dot{E}}+ \\
+T_{ACP\dot{B}}T_{QDF\dot{E}} - T_{APF\dot{E}}T_{QCD\dot{B}} - T_{ACP\dot{E}}T_{QFD\dot{B}})+ \\
+\varepsilon^{\dot{R}\dot{S}}(T_{ACD\dot{R}}\overline{T}_{\dot{S}\dot{B}\dot{E}F} - T_{ACF\dot{R}}\overline{T}_{\dot{S}\dot{E}\dot{B}D}) = 0,
\end{aligned}
\tag{7.140}
$$

где мы ввели спинорные индексы у матриц $R_{A\dot{B}C\dot{D}}$ и $T_{A\dot{B}}$ по правилу

$$
\begin{aligned}
R_{A\dot{B}C\dot{D}} \to R_{EFA\dot{B}C\dot{D}} = R_{EFkn}\sigma^k_{A\dot{B}}\sigma^n_{C\dot{D}}, \\
T_{A\dot{B}} \to T_{CDA\dot{B}} = T_{CDk}\sigma^k_{A\dot{B}}.
\end{aligned}
\tag{7.141}
$$

Подставляя в равенство (7.140) соотношение (7.136), получим уравнения (7.138).

Спин-тензоры $\Psi_{ABCE}$ и $\Phi_{AB\dot{C}\dot{E}}$ имеют следующие обозначения для своих компонент [29]

$$
\Psi_{ABCE} = \begin{array}{c|ccc}
 & & CE & \\
AB & 00 & 01 & 11 \\
\hline
00 & \Psi_0 & \Psi_1 & \Psi_2 \\
01 & - & - & \Psi_3 \\
11 & - & - & \Psi_4
\end{array},
\tag{7.142}
$$

$$
\Phi_{AB\dot{C}\dot{E}} = \begin{array}{c|ccc}
 & & \dot{C}\dot{E} & \\
AB & \dot{0}\dot{0} & \dot{0}\dot{1} & \dot{1}\dot{1} \\
\hline
00 & \Phi_{00} & \Phi_{01} & \Phi_{02} \\
01 & \Phi_{10} & \Phi_{11} & \Phi_{12} \\
11 & \Phi_{20} & \Phi_{21} & \Phi_{22}
\end{array},
\tag{7.143}
$$

$$
\Lambda = \overline{\Lambda}.
\tag{7.144}
$$

Используя соотношения (7.114), (7.115), (7.124), можно расписать уравнения (7.126) формализма Ньюмена–Пенроуза покомпонентно, при этом мы получим уравнения $(A.1)$ – $(A.8)$ плюс комплексно сопряженные им уравнения. С помощью соотношений (7.142)– (7.144), (7.114) можно также расписать покомпонентно уравнения (7.138) формализма Ньюмена–Пенроуза. В результате получаются уравнения $(B^{s+}.1)$–$(B^{s+}.18)$.

Спинорный аналог дуального тензора Римана

$$
\overset{*}{R}_{ijkm} = \frac{1}{2}\varepsilon_{km}{}^{sp}R_{ijsp}
\tag{7.145}
$$

запишется как

$$
\begin{aligned}
\overset{*}{R}_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}D\dot{D}} = i\,(\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\overline{\Psi}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} - \Psi_{ABCD}\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} - \\
-\overline{\Phi}_{CD\dot{A}\dot{B}}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} + \Phi_{AB\dot{C}\dot{D}}\varepsilon_{CD}\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} + \\
+2\Lambda(\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD}\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}\varepsilon_{\dot{D}\dot{C}} + \varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\varepsilon_{\dot{A}\dot{C}}\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}})).
\end{aligned}
\tag{7.146}
$$

Из этого соотношения следует

$$
\begin{aligned}
\overset{*}{R}_{A\dot{B}C\dot{D}EF} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{P}\dot{Q}}R_{A\dot{B}C\dot{D}E\dot{P}F\dot{Q}} = -i\,(-\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}\Psi_{ACEF} + \\
+\varepsilon_{EF}\Phi_{AC\dot{B}\dot{D}} + \Lambda\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}(\varepsilon_{AE}\varepsilon_{CF} + \varepsilon_{CE}\varepsilon_{AF})),
\end{aligned}
\tag{7.147}
$$

а также

$$\overset{*}{R}_{A\dot{B}C\dot{D}\dot{P}\dot{Q}}=\frac{1}{2}\varepsilon^{EF}R_{A\dot{B}C\dot{D}E\dot{P}F\dot{Q}}=i\Big(\varepsilon_{\dot{A}\dot{C}}\overline{\Psi}_{\dot{B}\dot{D}\dot{P}\dot{Q}}-$$
$$-\varepsilon_{\dot{P}\dot{Q}}\overline{\Phi}_{AC\dot{B}\dot{D}}+\Lambda\varepsilon_{AC}(\varepsilon_{\dot{D}\dot{P}}\varepsilon_{\dot{B}\dot{Q}}+\varepsilon_{\dot{B}\dot{P}}\varepsilon_{\dot{D}\dot{Q}})\Big). \qquad (7.148)$$

Дуальному тензору Вейля $\overset{*}{C}_{ijkm}$ соответствует спин-тензор вида

$$\overset{*}{C}_{ijkm}\leftrightarrow\overset{*}{C}_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}D\dot{D}}=i(\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\overline{\Psi}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}-\Psi_{ABCD}\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}}).$$

Для самодуального спин-тензора $R_{A\dot{B}C\dot{D}EF}$ справедливо соотношение

$$R_{A\dot{B}C\dot{D}EF}=i\,\overset{*}{R}_{A\dot{B}C\dot{D}EF}=\Psi_{ACEF}\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}, \qquad (7.149)$$

в то время как для антисамодуального имеем

$$\overline{R}_{A\dot{B}C\dot{D}\dot{P}\dot{Q}}=i\,\overset{*}{R}_{A\dot{B}C\dot{D}\dot{P}\dot{Q}}=\varepsilon_{AC}\overline{\Psi}_{\dot{B}\dot{B}\dot{P}\dot{Q}}. \qquad (7.150)$$

Вторые тождества Бианки $(D^{s+})$ геометрии $A_4$ в спинорном $\Delta$-базисе можно представить как

$$\frac{1}{2i}\varepsilon_{C\dot{D}}{}^{F\dot{E}G\dot{H}R\dot{X}}\partial_{P\dot{X}}R_{ABG\dot{H}F\dot{E}}-\Psi_{ABCR}T^{R}{}_{F}{}^{F}{}_{\dot{D}}-$$
$$-3\Psi_{RPB(A}T_{C)}{}^{RP}{}_{\dot{D}}+\Phi_{RB\dot{D}\dot{X}}T_{A}{}^{R}{}_{C}{}^{\dot{X}}+$$
$$+\Phi_{AB\dot{X}\dot{E}}\overline{T}^{\dot{X}}{}_{\dot{D}}{}^{\dot{E}}{}_{C}+\Phi_{AB\dot{D}\dot{X}}\overline{T}^{\dot{X}}{}_{\dot{E}}{}^{\dot{E}}{}_{C}=0, \qquad (7.151)$$

где

$$\varepsilon^{C\dot{D}F\dot{E}G\dot{H}R\dot{X}}=-i(\varepsilon^{CG}\varepsilon^{RF}\varepsilon^{\dot{D}\dot{E}}\varepsilon^{\dot{H}\dot{X}}-\varepsilon^{CF}\varepsilon^{GR}\varepsilon^{\dot{D}\dot{H}}\varepsilon^{\dot{E}\dot{X}}). \qquad (7.152)$$

*Доказательство.* Запишем уравнения (7.79) в виде

$$\nabla^{n}\,\overset{*}{R}_{ACkn}-\overset{*}{R}_{EAkn}\,T_{C}{}^{En}-\overset{*}{R}_{AEkn}\,T_{C}{}^{En}=0. \qquad (7.153)$$

Умножая эти уравнения на $\sigma^{k}_{C\dot{D}}$, имеем

$$\partial^{F\dot{E}}\,\overset{*}{R}_{BAC\dot{D}F\dot{E}}+\overset{*}{R}_{BAC\dot{D}F\dot{E}}\,\nabla^{n}\sigma_{n}{}^{F\dot{E}}+$$
$$+\overset{*}{R}_{BAR\dot{S}F\dot{E}}\,\sigma^{k}_{C\dot{D}}\,\partial^{F\dot{E}}\sigma_{k}{}^{R\dot{S}}-$$
$$-\overset{*}{R}_{BPC\dot{D}F\dot{E}}\,T_{A}{}^{PF\dot{E}}-\overset{*}{R}_{PAC\dot{D}F\dot{E}}\,T_{B}{}^{PF\dot{E}}=0. \qquad (7.154)$$

Здесь были использованы соотношения (7.94) и (7.133). Подставляя в уравнения (7.154) соотношение (7.148), получим

$$iD_{ABC\dot{D}}+A_{F\dot{E}P\dot{R}}{}^{i}\left(\sigma_{iC\dot{D}}R_{BA}{}^{P\dot{R}F\dot{E}}-2\sigma_{i}{}^{P\dot{R}}R_{BAC\dot{D}}{}^{F\dot{E}}\right)=0,$$

где через $A_{F\dot{E}P\dot{R}}{}^{i}$ обозначены уравнения (7.125), переписанные в виде

$$
\begin{aligned}
&A_{A\dot{B}C\dot{D}}{}^{i} = \partial_{A\dot{B}}\sigma^{i}{}_{C\dot{D}} - \partial_{C\dot{D}}\sigma^{i}{}_{A\dot{B}} - \\
&-\varepsilon^{PQ}\left(T_{PAC\dot{D}}\sigma^{i}{}_{Q\dot{B}} - T_{PCA\dot{B}}\sigma^{i}{}_{Q\dot{D}}\right) - \\
&-\varepsilon^{\dot{R}\dot{S}}\left(\overline{T}_{\dot{R}\dot{B}\dot{D}C}\sigma^{i}{}_{A\dot{S}} - \overline{T}_{\dot{R}\dot{D}\dot{B}A}\sigma^{i}{}_{C\dot{S}}\right) = 0,
\end{aligned} \tag{7.155}
$$

а величина $D_{ABC\dot{D}} = 0$ определяет уравнения (7.151)

$$
\begin{aligned}
&D_{ABC\dot{D}} = \frac{1}{2i}\varepsilon_{C\dot{D}}{}^{F\dot{E}G\dot{H}R\dot{X}}\partial_{R\dot{X}}R_{ABG\dot{H}F\dot{E}} - \\
&-\Psi_{ABCR}T^{R}{}_{F}{}^{F}{}_{\dot{D}} - 3\Psi_{RPB(A}T_{C)}{}^{RP}{}_{\dot{D}} + \Phi_{RB\dot{D}\dot{X}}T_{A}{}^{R}{}_{C}{}^{\dot{X}} + \\
&+\Phi_{AB\dot{X}\dot{E}}\overline{T}^{\dot{X}}{}_{\dot{D}}{}^{\dot{E}}{}_{C} + \Phi_{AB\dot{D}\dot{X}}\overline{T}^{\dot{X}}{}_{\dot{E}}{}^{\dot{E}}{}_{C} = 0,
\end{aligned}
$$

что и доказывает выдвинутое предложение.

Вторые тождества Бианки (7.151) геометрии $A_4$ совпадают с тождествами Бианки

$$
\begin{aligned}
&\partial^{P}_{\dot{D}}\Psi_{ABPC} - \partial^{\dot{X}}{}_{(C}\Phi_{AB)\dot{D}\dot{X}} - 3\Psi_{PR(AB}T_{C)}{}^{PR}{}_{\dot{D}} - \\
&-\Psi_{ABCP}T^{P}{}_{R}{}^{R}{}_{\dot{D}} + 2T^{P}{}_{(AB}{}^{\dot{X}}\Phi_{C)P\dot{X}\dot{D}} - \\
&-\overline{T}_{\dot{X}\dot{D}\dot{V}(A}\Phi_{BC)}{}^{\dot{X}\dot{V}} - \overline{T}_{\dot{X}}{}^{\dot{V}}{}_{\dot{V}(A}\Phi_{BC)}{}^{\dot{X}}{}_{\dot{D}} = 0,
\end{aligned} \tag{7.156}
$$

$$
\begin{aligned}
&3\partial_{A\dot{B}}\Lambda + \partial^{P\dot{X}}\Phi_{AP\dot{B}\dot{X}} - \varepsilon^{\dot{V}\dot{W}}\Big(\Phi_{AP}{}^{\dot{X}}{}_{\dot{W}}\overline{T}_{\dot{B}\dot{X}\dot{V}}{}^{P} + \\
&+\Phi_{AP\dot{B}}{}^{\dot{X}}\overline{T}_{\dot{X}\dot{W}\dot{V}}{}^{P}\Big) + \Phi_{PR\dot{B}}{}^{\dot{X}}T_{A}{}^{PR}{}_{\dot{X}} + \\
&+\Phi_{AP\dot{B}}{}^{\dot{X}}T^{P}{}_{R}{}^{R}{}_{\dot{X}} = 0
\end{aligned} \tag{7.157}
$$

из работы Ньюмена–Пенроуза [30].

*Доказательство.* Используя соотношение (7.147) и равенство

$$
\overset{*}{R}_{ABC\dot{D}}{}^{R\dot{X}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{C\dot{D}}{}^{F\dot{E}G\dot{H}R\dot{X}}R_{ABG\dot{H}F\dot{E}},
$$

в уравнениях (7.151) получаем

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2i}\varepsilon_{C\dot{D}}{}^{F\dot{E}G\dot{H}R\dot{X}}\partial_{P\dot{X}}R_{ABG\dot{H}F\dot{E}} = \partial_{P\dot{X}}R_{ABC\dot{D}}{}^{R\dot{X}} = \\
&= \partial_{P\dot{X}}\left(\varepsilon_{\dot{D}}{}^{\dot{X}}\Psi_{ABC}{}^{R} - \varepsilon_{AB}\Phi_{C}{}^{R}{}_{\dot{D}}{}^{\dot{X}} - \Lambda\varepsilon_{\dot{D}}{}^{\dot{X}}(\varepsilon_{CA}\varepsilon_{B}{}^{R} + \varepsilon_{BA}\varepsilon_{C}{}^{R})\right).
\end{aligned}
$$

Подставляя это соотношение в уравнения (7.151), имеем

$$
\begin{aligned}
&\partial^{P}{}_{\dot{D}}\Psi_{ABPC} - \partial_{C}{}^{\dot{X}}\Phi_{AB\dot{D}\dot{X}} + 2\varepsilon_{C(A}\partial_{B)\dot{D}}\Lambda - \Psi_{ABCR}T^{R}{}_{F}{}^{F}{}_{\dot{D}} - \\
&-3\Psi_{RPB(A}T_{C)}{}^{RP}{}_{\dot{D}} + \Phi_{RB\dot{D}\dot{X}}T_{A}{}^{R}{}_{C}{}^{\dot{X}} + \Phi_{AB\dot{X}\dot{E}}\overline{T}^{\dot{X}}{}_{\dot{D}}{}^{\dot{E}}{}_{C} + \\
&+\Phi_{AB\dot{D}\dot{X}}\overline{T}^{\dot{X}}{}_{\dot{E}}{}^{\dot{E}}{}_{C} = 0.
\end{aligned} \tag{7.158}
$$

Симметричная по индексам $C$ и $B$ часть равенства (7.158) записывается в виде уравнений (7.156), а антисимметричная часть имеет вид уравнений (7.157).

Записывая вторые тождества Бианки $(D^{s^+})$ геометрии $A_4$ покомпонентно, имеем [30]

$$(D-4\rho-2\varepsilon)\Psi_1-(\overline{\delta}-4\alpha+\pi)\Psi_0+3\kappa\Psi_2+(\delta-2\beta-2\overline{\alpha}+\overline{\pi})\Phi_{00}-$$
$$-(D-2\overline{\rho}-2\varepsilon)\Phi_{01}-2\kappa\Phi_{11}+2\sigma\Phi_{10}-\overline{\kappa}\Phi_{02}=0, \qquad (D^{s^+}.1)$$

$$(D-3\rho)\Psi_2-(\overline{\delta}+2\pi-2\alpha)\Psi_1+2\kappa\Psi_3+\lambda\Psi_0+(\delta-2\overline{\alpha}+\overline{\pi})\Phi_{10}-$$
$$-(D-2\overline{\rho})\Phi_{11}-\kappa\Phi_{21}-\overline{\kappa}\Phi_{12}-\mu\Phi_{00}+\pi\Phi_{01}+\sigma\Phi_{20}-D\Lambda=0, \qquad (D^{s^+}.2)$$

$$(D-2\rho+2\varepsilon)\Psi_3-(\overline{\delta}+3\pi)\Psi_2+2\lambda\Psi_1+\kappa\Psi_4+(\delta-2\overline{\alpha}+2\beta+\overline{\pi})\Phi_{20}-$$
$$-(D-2\overline{\rho}+2\varepsilon)\Phi_{21}-2\mu\Phi_{10}+2\pi\Phi_{11}-\overline{\kappa}\Phi_{22}-2\delta\Lambda=0, \qquad (D^{s^+}.3)$$

$$(\delta-4\tau-2\beta)\Psi_1-(\Delta-4\gamma+\mu)\Psi_0+3\sigma\Psi_2+(\delta-2\beta+2\overline{\pi})\Phi_{01}-(D-2\varepsilon+2\overline{\varepsilon}-$$
$$-\overline{\rho})\Phi_{02}-2\kappa\Phi_{12}+2\sigma\Phi_{11}-\overline{\lambda}\Phi_{00}=0, \qquad (D^{s^+}.4)$$

$$(\delta-3\tau)\Psi_2-(\Delta+2\mu-2\gamma)\Psi_1+2\sigma\Psi_3+\nu\Psi_0+(\delta+2\overline{\pi})\Phi_{11}-(D+2\overline{\varepsilon}-$$
$$-\overline{\rho})\Phi_{12}-\kappa\Phi_{22}-\mu\Phi_{01}+\pi\Phi_{02}+\sigma\Phi_{21}-\overline{\lambda}\Phi_{10}-\delta\Lambda=0, \qquad (D^{s^+}.5)$$

$$(\delta+2\beta-2\tau)\Psi_3-(\Delta+3\mu)\Psi_2+2\nu\Psi_1+\sigma\Psi_4+(\delta+2\beta+2\overline{\pi})\Phi_{21}-$$
$$-(D+2\varepsilon+2\overline{\varepsilon}-\overline{\rho})\Phi_{22}-2\mu\Phi_{11}+2\pi\Phi_{12}-\overline{\lambda}\Phi_{20}-2\Delta\Lambda=0, \qquad (D^{s^+}.6)$$

$$(D+4\varepsilon-\rho)\Psi_4-(\overline{\delta}+4\pi+2\alpha)\Psi_3+3\lambda\Psi_2+(\Delta+2\gamma-2\overline{\gamma}+\overline{\mu})\Phi_{20}-$$
$$-(\overline{\delta}+2\alpha-2\overline{\tau})\Phi_{21}-2\nu\Phi_{10}+2\lambda\Phi_{11}-\overline{\sigma}\Phi_{22}=0, \qquad (D^{s^+}.7)$$

$$(\delta+4\beta-\tau)\Psi_4-(\Delta+2\gamma+4\mu)\Psi_3+3\nu\Psi_2+(\Delta+2\gamma+2\overline{\mu})\Phi_{21}-(\overline{\delta}+2\alpha+$$
$$+2\overline{\beta}-\overline{\tau})\Phi_{22}-2\nu\Phi_{11}+2\lambda\Phi_{12}-\overline{\nu}\Phi_{20}=0, \qquad (D^{s^+}.8)$$

$$(D-2\rho-2\overline{\rho})\Phi_{11}-(\delta-2\overline{\alpha}-2\tau+\overline{\pi})\Phi_{10}-(\delta-2\overline{\tau}-2\alpha+\pi)\Phi_{01}+$$
$$+(\Delta+2\gamma-2\overline{\gamma}+\mu+\overline{\mu})\Phi_{00}+\overline{\kappa}\Phi_{12}+\kappa\Phi_{21}-\overline{\sigma}\Phi_{02}-\sigma\Phi_{20}+3D\Lambda=0, \qquad (D^{s^+}.9)$$

$$(D-2\rho+2\overline{\varepsilon}-\overline{\rho})\Phi_{12}-(\delta+2\overline{\pi}-2\tau)\Phi_{11}-(\overline{\delta}+2\overline{\beta}-2\alpha-\overline{\tau}+\pi)\Phi_{02}+(\Delta+2\overline{\mu}-$$

$$-2\gamma+\mu)\Phi_{01}+\kappa\Phi_{22}-\overline{\nu}\Phi_{00}-\overline{\lambda}\Phi_{10}-\sigma\Phi_{21}+3\delta\Lambda=0, \qquad (D^{s^+}.10)$$

$$(D+2\varepsilon+2\overline{\varepsilon}-\rho-\overline{\rho})\Phi_{22}-(\delta+2\overline{\pi}+2\beta-\tau)\Phi_{21}-(\overline{\delta}+2\overline{\beta}+2\pi-\overline{\tau})\Phi_{12}+(\Delta+2\mu+$$

$$+2\overline{\mu})\Phi_{11}-\overline{\nu}\Phi_{10}-\nu\Phi_{01}+\overline{\lambda}\Phi_{20}+\lambda\Phi_{02}+3\Delta\Lambda=0. \qquad (D^{s^+}.11)$$

Чтобы получить полную систему вторых тождеств Бианки $(D)$ геометрии $A_4$, необходимо добавить к этим уравнениям комплексно сопряженные уравнения $(D^{s^-})$.

## 7.7 Вариационный принцип для вывода структурных уравнений Картана и вторых тождеств Бианки геометрии $A_4$

Рассмотрим сначала вывод структурных уравнений $(B)$ и вторых тождеств Бианки $(D)$ для самодуальных и антисамодуальных полей римановой кривизны, матрицы Кармели которых удовлетворяют условиям:

$$R_{kn}=\pm i\overset{*}{R}_{kn},$$

$$R^{+}_{kn}=\pm i\overset{*}{R}_{kn},$$

где

$$R_{kn}+2\nabla_{[k}T_{n]}-[T_k,T_n]=0,$$
$$R^{+}_{kn}+2\nabla_{[k}T^{+}_{n]}-[T^{+}_k,T^{+}_n]=0$$

и

$$\overset{*}{R}_{kn}=\frac{1}{2}\varepsilon^{knps}R_{ps},$$

$$\overset{*}{R}{}^{+}_{kn}=\frac{1}{2}\varepsilon^{knps}R^{+}_{ps}.$$

Выберем функцию Лагранжа в виде

$$L_1=-\frac{1}{4}(-g)^{1/2}Tr(R_{kn}R^{kn})+\text{к. с. часть.} \qquad (7.159)$$

Варьируя это выражение по $T_k$ и $T^{+}_k$, получим уравнения $(D)$

$$\nabla^n\overset{*}{R}_{kn}+[\overset{*}{R}_{kn},T^n]=0, \qquad (7.160)$$

$$\nabla^n\overset{*}{R}{}^{+}_{kn}+[\overset{*}{R}{}^{+}_{kn},T^{+n}]=0. \qquad (7.161)$$

Для произвольных полей римановой кривизны функция Лагранжа имеет следующий вид:

$$L_2=-\frac{1}{2}(-g)^{1/2}Tr\left(\overset{*}{R}{}^{kn}(-\frac{1}{2}R_{kn}-2\nabla_{[k}T_{n]}+[T_k,T_n])\right)+\text{к.с. часть.} \qquad (7.162)$$

Вариация этого лагранжиана по $\overset{*}{R}_{kn}$ и $\overset{*}{R}{}^{+}{}_{kn}$ приводит к вторым тождествам Бианки $(D)$

$$\nabla^n \overset{*}{R}_{kn} + [\overset{*}{R}_{kn}, T^n] = 0, \qquad (D^{s^+})$$

$$\nabla^n \overset{*}{R}{}^{+}{}_{kn} + [\overset{*}{R}{}^{+}_{kn}, T^{+n}] = 0. \qquad (D^{s^-})$$

С другой стороны, вариация лагранжиана (7.162) по $T_k$ и $T^+{}_k$ дает вторые структурные уравнения Картана $(B)$ геометрии $A_4$

$$R_{kn} + 2\nabla_{[k}T_{n]} - [T_k, T_n] = 0, \qquad (B^{s^+})$$

$$R^+_{kn} + 2\nabla_{[k}T^+_{n]} - [T^+_k, T^+_n] = 0 \qquad (B^{s^-})$$

и

$$\overset{*}{R}_{kn} = \frac{1}{2}\varepsilon^{knps}R_{ps},$$

$$\overset{*}{R}{}^{+}_{kn} = \frac{1}{2}\varepsilon^{knps}R^+_{ps}.$$

Лагранжиан (7.162) содержит в качестве независимых переменных величины $R_{kn}$, $R^+_{kn}$, $T_k$ и $T^+_k$. Чтобы получить из них с помощью вариационного принципа первые структурные уравнения Картана $(A)$ геометрии $A_4$

$$\nabla_{[k}\sigma^{i]} - T_{[k}\sigma^{i]} - \sigma^{[i}T^+_{k]} = 0, \qquad (A^s)$$

необходимо ввести в лагранжиан (7.162) в качестве независимых переменных матрицы $\sigma^i$. Сделать это можно путем модификации лагранжиана (7.162) таким образом, как это сделано в работе [54].

Запишем уравнения $(A)$,$(B)$ и $(D)$ в спинорной форме следующим образом:

$$(A) \qquad A^i{}_{A\dot{B}C\dot{D}} = 0, \qquad (7.163)$$

$$(B) \quad B_{F\dot{E}ACD\dot{B}} = 0 + \text{к.с. уравнения}, \qquad (7.164)$$

$$(D) \quad D_{ABC\dot{D}} = 0 + \text{к.с. уравнения}, \qquad (7.165)$$

где

$$\begin{aligned} A^i_{A\dot{B}C\dot{D}} = \partial_{A\dot{B}}\sigma^i_{C\dot{D}} - \partial_{C\dot{D}}\sigma^i_{A\dot{B}} - \varepsilon^{PQ}(T_{PAC\dot{D}}\sigma^i_{Q\dot{B}} - \\ -T_{PCA\dot{B}}\sigma^i_{Q\dot{D}}) - \varepsilon^{\dot{R}\dot{S}}(\overline{T}_{\dot{R}\dot{B}\dot{D}C}\sigma^i_{A\dot{S}} - \\ -\overline{T}_{\dot{R}\dot{D}\dot{B}A}\sigma^i_{C\dot{S}}) = 0, \end{aligned} \qquad (7.166)$$

$$\begin{aligned} B_{ACF\dot{E}D\dot{B}} = R_{ACF\dot{E}D\dot{B}} - \partial_{D\dot{B}}T_{ACE\dot{F}} + \partial_{E\dot{F}}T_{ACD\dot{B}} + \\ +\varepsilon^{PQ}(T_{APD\dot{B}}T_{QCF\dot{E}} + \\ +T_{ACP\dot{B}}T_{QDF\dot{E}} - T_{APF\dot{E}}T_{QCD\dot{B}} - T_{ACP\dot{E}}T_{QFD\dot{B}}) + \\ +\varepsilon^{\dot{R}\dot{S}}(T_{ACD\dot{R}}\overline{T}_{\dot{S}\dot{B}\dot{E}F} - T_{ACF\dot{R}}\overline{T}_{\dot{S}\dot{E}\dot{B}D}) = 0, \end{aligned} \qquad (7.167)$$

$$D_{ABC\dot{D}} = \frac{1}{2i}\varepsilon_{C\dot{D}}{}^{F\dot{E}G\dot{H}R\dot{X}}\partial_{R\dot{X}}R_{ABG\dot{H}F\dot{E}} -$$
$$-\Psi_{ABCR}T^{R}{}_{F}{}^{F}{}_{\dot{D}} - 3\Psi_{RPB(A}T_{C)}{}^{RP}{}_{\dot{D}} +$$
$$+\Phi_{RB\dot{D}\dot{X}}T_{A}{}^{R}{}_{C}{}^{\dot{X}} + \Phi_{AB\dot{X}\dot{E}}\overline{T}^{\dot{X}}{}_{\dot{D}}{}^{\dot{E}}{}_{C} + \Phi_{AB\dot{D}\dot{X}}\overline{T}^{\dot{X}}{}_{\dot{E}}{}^{\dot{E}}{}_{C} = 0, \qquad (7.168)$$

и рассмотрим лагранжиан

$$L_3 = \overset{*}{R}{}^{B}{}_{\dot{Q}}{}^{A\dot{Q}kn}\left((2\nabla_n T_{ABk} + 2T_{PAn}T_B{}^P{}_k) - \frac{1}{4}R_{BPA}{}^P{}_{nk}\right) + \text{к.с. часть.} \qquad (7.169)$$

Здесь $\overset{*}{R}{}^{B}{}_{\dot{Q}}{}^{A\dot{Q}kn} = \varepsilon^{nkjm}R^{B}{}_{\dot{Q}}{}^{A\dot{Q}}{}_{jm}$ и $\varepsilon^{nkjm}$ – полностью антисимметричный символ Леви–Чивита.

Рассматривая $R^{B}{}_{\dot{Q}}{}^{A\dot{Q}kn}$ и $T_{PAn}$ как независимые переменные и применяя обычную вариационную процедуру, получим следующие уравнения:

$$(B^{s+}) \quad \frac{1}{2}R_{B\dot{P}A}{}^{\dot{P}}{}_{kn} - 2\nabla_{[k}T_{|AB|n]} + 2T_{PA[k}T^{P}{}_{|B|n]} = 0, \qquad (7.170)$$

$$(B^{s-}) \qquad \text{к.с. уравнения}, \qquad (7.171)$$

$$(D^{s+}) \qquad \nabla^k \overset{*}{R}_{B\dot{Q}A}{}^{\dot{Q}}{}_{nk} - 2\overset{*}{R}_{P\dot{Q}(A}{}^{\dot{Q}}{}_{|nk|}T^{Pk}_{B)} = 0, \qquad (7.172)$$

$$(D^{s-}) \qquad \text{к.с. уравнения}. \qquad (7.173)$$

Умножая уравнения (7.170) на $\sigma_{C\dot{D}}{}^{n}\sigma_{F\dot{E}}{}^{n}$, получим

$$\partial_{F\dot{E}}T_{ABC\dot{D}} - \partial_{C\dot{D}}T_{ABF\dot{E}} + T_{PAF\dot{E}}T^{P}_{BA\dot{D}} - T_{PAC\dot{D}}T^{P}_{BF\dot{E}} -$$
$$-\frac{1}{2}R_{B\dot{Q}A}{}^{P}{}_{F\dot{E}C\dot{D}} + T_{ABn}(\partial_{C\dot{D}}\sigma_{F\dot{E}}{}^{n} - \partial_{F\dot{E}}\sigma_{C\dot{D}}{}^{n}) = 0. \qquad (7.174)$$

Используя обозначения (7.166) и (7.167), запишем равенство (7.174) в виде

$$B_{ACF\dot{E}D\dot{B}} + A^{n}{}_{CDF\dot{E}}T_{ABn} = 0. \qquad (7.175)$$

Умножим теперь уравнения (7.172) на $\sigma_{C\dot{D}}{}^{k}$. В результате получаем соотношение

$$\partial^{F\dot{E}}\overset{*}{R}{}_{B\dot{Q}A}{}^{\dot{Q}}{}_{C\dot{D}E\dot{F}} + \overset{*}{R}_{B\dot{Q}A}{}^{\dot{Q}}{}_{C\dot{D}E\dot{F}}\nabla^k\sigma_k{}^{F\dot{E}} +$$
$$+\overset{*}{R}_{B\dot{Q}A}{}^{\dot{Q}}{}_{R\dot{S}E\dot{F}}\sigma^{n}{}_{C\dot{D}}\partial^{F\dot{E}}\sigma^{R\dot{S}}{}_{n} -$$
$$-\overset{*}{R}_{B\dot{Q}P}{}^{\dot{Q}}{}_{C\dot{D}E\dot{F}}T_A{}^{PF\dot{E}} - \overset{*}{R}_{P\dot{Q}A}{}^{\dot{Q}}{}_{C\dot{D}E\dot{F}}T_B{}^{PF\dot{E}} = 0, \qquad (7.176)$$

или, учитывая равенства (7.166) и (7.167),

$$iD_{ABC\dot{D}} + A_{F\dot{E}P\dot{R}}{}^{n}\left(\frac{1}{2}\sigma_{nC\dot{D}}\overset{*}{R}_{B\dot{Q}A}{}^{\dot{Q}P\dot{R}E\dot{F}} - \sigma_n{}^{P\dot{R}}\overset{*}{R}_{B\dot{Q}A}{}^{\dot{Q}}{}_{C\dot{D}}{}^{E\dot{F}}\right) = 0. \qquad (7.177)$$

Здесь было использовано также соотношение

$$\overset{*}{R}_{B\dot{Q}A}{}^{\dot{Q}}{}_{C\dot{D}E\dot{F}} = i\big(2\Psi_{BACF}\varepsilon_{\dot{D}\dot{E}} - 2\varepsilon_{CF}\Phi_{AB\dot{D}\dot{E}} + 2\Lambda\varepsilon_{\dot{D}\dot{E}}(\varepsilon_{BF}\varepsilon_{AC} + \\ + \varepsilon_{BC}\varepsilon_{AF})\big).$$

Очевидно, что из лагранжиана (7.169) невозможно получить первые структурные уравнения Картана $(A)$ геометрии $A_4$, поскольку он не содержит переменных $\sigma_{C\dot{D}}{}^{n}$.

Добавим к лагранжиану (7.169) член

$$\lambda_j^{A\dot{B}C\dot{D}} A^j{}_{A\dot{B}C\dot{D}}, \tag{7.178}$$

в котором величины $\lambda^{A\dot{B}C\dot{D}}$ играют роль множителей Лагранжа

$$L_4 = L_3 + \lambda_j^{A\dot{B}C\dot{D}} A^j{}_{A\dot{B}C\dot{D}} + \text{к.с. часть}. \tag{7.179}$$

Величины $\lambda_j^{A\dot{B}C\dot{D}}$, так же как и $A^j{}_{A\dot{B}C\dot{D}}$, являются эрмитовыми матрицами, антисимметричными по паре индексов $A\dot{B}$ и $C\dot{D}$. Вариационная процедура с плотностью Лагранжа (7.179) при вариации по переменным $\sigma_{C\dot{D}}{}^{n}$ дает уравнения [54]

$$A^j{}_{A\dot{B}C\dot{D}} = 0 \tag{7.180}$$

и

$$D_{ABC\dot{D}} = \sigma_k^{P\dot{R}}\sigma^{\dot{X}}_{nB}(\lambda^n_{A\dot{X}P\dot{R}} - \overline{\lambda}^n_{A\dot{X}P\dot{R}})\sigma^k_{C\dot{D}} = 0. \tag{7.181}$$

Поскольку $\lambda^n_{A\dot{X}P\dot{R}}$ – эрмитовы матрицы, то из равенства (7.181) следуют уравнения $(D^{s^+})$

$$D_{ABC\dot{D}} = 0. \tag{7.182}$$

Соответственно при варьировании комплексно сопряженной части лагранжиана (7.179) имеем

$$\overline{D}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}D} = 0. \tag{7.183}$$

Вариация лагранжиана (7.179) по $R^B{}_{\dot{Q}A}{}^{\dot{Q}kn}$ дает

$$B_{ACF\dot{E}D\dot{B}} + A^n{}_{CDF\dot{E}}T_{ABn} = 0, \tag{7.184}$$

или, учитывая соотношение (7.180),

$$B_{ACF\dot{E}D\dot{B}} = 0. \tag{7.185}$$

При варьировании комплексно сопряженной части по $\overline{R}^{\dot{B}}{}_{Q}{}^{\dot{A}Qkn}$, получим

$$\overline{B}_{ACF\dot{E}D\dot{B}} = 0. \tag{7.186}$$

Таким образом, было показано, что из лагранжиана (7.179) следуют первые и вторые структурные уравнения Картана геометрии $A_4$ (7.180), (7.185) и (7.186), а также вторые тождества Бианки (7.182) и (7.183).

## 7.8 Разложение спинорных полей геометрии $A_4$ на неприводимые части

Тензор кручения $\Omega_{jk}^{..i}$ пространства $A_4$ имеет 24 независимых компоненты и разлагается на сумму трех неприводимых частей следующим образом:

$$\Omega^{i}_{.jk} = \frac{2}{3}\delta^{i}_{[k}\Omega_{j]} + \frac{1}{3}\varepsilon^{n}_{jks}\hat{\Omega}^{s} + \overline{\Omega}^{i}_{.jk}, \tag{7.187}$$

где

$$\Omega^{i}_{.jk} = g^{im}g_{ks}\Omega^{..s}_{mj}, \tag{7.188}$$

а вектор $\Omega_j$, псевдовектор $\hat{\Omega}_j$ и бесследовая часть кручения $\overline{\Omega}^{i}_{.jk}$ определяются как

$$\Omega_j = \Omega^{i}_{.ji}, \tag{7.189}$$

$$\hat{\Omega}_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{jins}\Omega^{ins}, \tag{7.190}$$

$$\overline{\Omega}^{s}_{.js} = 0, \quad \overline{\Omega}_{ijs} + \overline{\Omega}_{jsi} + \overline{\Omega}_{sij} = 0. \tag{7.191}$$

При переходе к спинорному базису спинорное представление коэффициентов вращения Риччи $T_{ABC\dot{C}}$ имеет вид [30]

$$T_{ABC\dot{C}} = \frac{1}{2}\left(A_{ABC\dot{C}} + \frac{1}{3}(\varepsilon_{AC}\alpha_{B\dot{C}} + \varepsilon_{BC}\alpha_{A\dot{C}})\right), \tag{7.192}$$

где спинор $A_{ABC\dot{C}}$ полностью симметричен по нештрихованным индексам

$$A_{ABC\dot{C}} = A_{(ABC)\dot{C}}, \tag{7.193}$$

а спинор $\alpha_{B\dot{C}}$ определяется как

$$\alpha_{A\dot{C}} = A_{AB}{}^{B}{}_{\dot{C}}. \tag{7.194}$$

В свою очередь, спинор $\alpha_{A\dot{C}}$ может быть разложен на эрмитову и антиэрмитову части:

$$\alpha_{A\dot{C}} = \kappa_{A\dot{C}} - i\mu_{A\dot{C}}, \tag{7.195}$$

где

$$\kappa_{A\dot{C}} = \frac{1}{2}(\alpha_{A\dot{C}} + \overline{\alpha}_{\dot{A}C}), \quad \mu_{A\dot{C}} = \frac{1}{2}i(\alpha_{A\dot{C}} - \overline{\alpha}_{\dot{A}C}) \tag{7.196}$$

и

$$\overline{\kappa_{A\dot{C}}} = \overline{\kappa}_{\dot{A}C} = \kappa_{C\dot{A}}, \quad \overline{\mu_{A\dot{C}}} = \overline{\mu}_{A\dot{C}} = \mu_{C\dot{A}}. \tag{7.197}$$

Между неприводимыми частями кручения (7.189)–(7.191) и спинорами (7.193)–(7.197) имеет место следующее соответствие:

$$\Omega_j \longleftrightarrow \kappa_{A\dot{C}}, \tag{7.198}$$

$$\hat{\Omega}_j \longleftrightarrow \mu_{A\dot{C}}, \tag{7.199}$$

$$\overline{\Omega}^{k}_{.js} \longleftrightarrow A_{ABC\dot{C}}. \tag{7.200}$$

Поскольку

$$\Omega_{ijk} = g_{sk}\Omega_{ij}^{\cdot\cdot s}, \tag{7.201}$$

то имеют место соотношения

$$\Omega_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}} \longleftrightarrow \Omega_{ijk}, \tag{7.202}$$

$$\Omega_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}} = \frac{1}{2}(\Omega_{ABC\dot{C}}\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} + \overline{\Omega}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}C}\varepsilon_{AB}), \tag{7.203}$$

$$\Omega_{ABC\dot{C}} = A_{C(AB)\dot{C}} + \overline{\alpha}_{\dot{C}(A}\varepsilon_{B)C}. \tag{7.204}$$

По определению спинор $A_{ABC\dot{C}}$ преобразуется по $D(3/2.1/2)$ неприводимому представлению группы $SL(2.C)$. Соответственно, спиноры $\kappa_{A\dot{C}}$ и $\mu_{A\dot{C}}$ преобразуются по $D(1/2.1/2)$ неприводимым представлениям группы $SL(2.C)$. Используя соотношение (7.124), можно определить компоненты спиноров $\kappa_{A\dot{C}}$ и $\mu_{A\dot{C}}$ [55]:

$$\kappa_{A\dot{C}} = 1/2 \begin{pmatrix} (\rho+\overline{\rho}) - (\varepsilon+\overline{\varepsilon}) & (\tau+\beta) + (\overline{\alpha}-\overline{\pi}) \\ (\overline{\tau}-\overline{\beta}) + (\alpha-\pi) & (\gamma+\overline{\gamma}) - (\mu+\overline{\mu}) \end{pmatrix}, \tag{7.205}$$

$$\mu_{A\dot{C}} = i/2 \begin{pmatrix} (\rho-\overline{\rho}) - (\varepsilon-\overline{\varepsilon}) & (\tau-\beta) - (\overline{\alpha}-\overline{\pi}) \\ -(\overline{\tau}-\overline{\beta}) + (\alpha-\pi) & (\gamma-\overline{\gamma}) - (\mu-\overline{\mu}) \end{pmatrix}. \tag{7.206}$$

Разложение тензора Римана на неприводимые части имеет вид

$$R_{ijkm} = C_{ijkm} + g_{i[k}R_{m]j} + g_{j[k}R_{m]i} + \frac{1}{3}Rg_{i[m}g_{k]j}. \tag{7.207}$$

В спинорном базисе это разложение запишется как [30]

$$\begin{aligned} R_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}D\dot{D}} = \Psi_{ABCD}\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} + \\ +\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\overline{\Psi}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} + \Phi_{AB\dot{C}\dot{D}}\varepsilon_{CD}\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} + \\ +\overline{\Phi}_{CD\dot{A}\dot{B}}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} + 2\Lambda(\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD}\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} + \\ +\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\varepsilon_{\dot{A}\dot{D}}\varepsilon_{\dot{B}\dot{C}}). \end{aligned} \tag{7.208}$$

При этом имеет место соответствие

$$\begin{aligned} C_{ijkm} \longleftrightarrow \Psi_{ABCD}\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} + \varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\overline{\Psi}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}, \\ R_{ij} \longleftrightarrow 2\Phi_{AB\dot{C}\dot{D}} + 6\varepsilon_{AB}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}}, \\ R \longleftrightarrow 24\Lambda, \end{aligned} \tag{7.209}$$

где спиноры $\Psi_{ABCD}$, $\Phi_{AB\dot{C}\dot{D}}$ и $\Lambda$ удовлетворяют следующим свойствам симметрии:

$$\Psi_{ABCD} = \Psi_{(ABCD)}, \quad \Phi_{AB\dot{C}\dot{D}} = \Phi_{(AB)(\dot{C}\dot{D})}, \quad \Lambda = \overline{\Lambda}$$

и принадлежат к $D(2.0)$, $D(1.1)$ и $D(0.0)$ неприводимым представлениям группы $SL(2.C)$ соответственно.

## 7.9 Спинорное представление уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса

В первой части работы было показано, что структурные уравнения Картана геометрии абсолютного параллелизма $(A)$ и $(B)$ могут быть представлены в виде расширенной геометризированной системы уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса

$$\begin{aligned} \nabla_{[k}e^a{}_{j]} + T^i_{[kj]}e^a{}_i = 0, && (A) \\ R_{jm} - \tfrac{1}{2}g_{jm}R = \nu T_{jm}, && (B.1) \\ C^i{}_{jkm} + 2\nabla_{[k}T^i{}_{|j|m]} + 2T^i_{s[k}T^s{}_{|j|m]} = -\nu J^i{}_{jkm}. && (B.2) \end{aligned} \qquad (7.210)$$

Запишем эту систему уравнений в спинорном базисе. Для этого мы используем матрицы Кармели и спинорный формализм Ньюмена– Пенроуза. Пусть мы имеем правую спиновую геометрию $A_4$, тогда ее уравнения $(A)$ и $(B)$ запишутся как

$$\partial_{C\dot{D}}\sigma^i{}_{A\dot{B}} - \partial_{A\dot{B}}\sigma^i_{C\dot{D}} = (T_{C\dot{D}})^P_A\sigma^i{}_{P\dot{B}} + \sigma^i{}_{A\dot{R}}(T^+_{\dot{D}C})^{\dot{R}}_{\dot{B}} -$$
$$-(T_{A\dot{B}})^P_C\sigma^i{}_{P\dot{D}} - \sigma^i_{C\dot{R}}(T^+_{\dot{B}A})^{\dot{R}}_{\dot{D}}, \qquad (A^s)$$

$$R_{A\dot{B}C\dot{D}} = \partial_{C\dot{D}}T_{A\dot{B}} - \partial_{A\dot{B}}T_{C\dot{D}} - (T_{C\dot{D}})^F_A T_{F\dot{B}} - (T^+_{\dot{D}C})^{\dot{F}}_{\dot{B}}T_{A\dot{F}} +$$
$$+(T_{A\dot{B}})^F_C T_{F\dot{D}} + (T^+_{\dot{B}A})^{\dot{F}}_{\dot{D}}T_{C\dot{F}} + [T_{A\dot{B}}, T_{C\dot{D}}], \qquad (B^{s+})$$

где компоненты матриц $\sigma^i{}_{A\dot{B}}$, $T_{A\dot{B}}$ и $R_{A\dot{B}C\dot{D}}$ определяются согласно соотношениям (7.115), (7.88) и (7.103) соответственно.

Уравнения $(B.1)$ в спинорном базисе имеют вид

$$2\Phi_{AB\dot{C}\dot{D}} + \Lambda\varepsilon_{AB}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} = \nu T_{A\dot{C}B\dot{D}}. \qquad (7.211)$$

*Доказательство.* Через неприводимые спиноры (7.209) $P-Q$ компоненты спинорной матрицы $R_{A\dot{B}C\dot{D}}$ выражаются как [56]

$$(R_{A\dot{B}C\dot{D}})_P{}^Q = \varepsilon_{\dot{D}\dot{B}}\left(\Psi_{CAP}{}^Q - \Lambda(\varepsilon_{PC}\delta^Q_A + \varepsilon_{PA}\delta^Q_C)\right) +$$
$$+\varepsilon_{CA}\Phi_P{}^Q{}_{\dot{D}\dot{B}}, \qquad (7.212)$$

где

$$(C_{A\dot{B}C\dot{D}})_P{}^Q = \varepsilon_{\dot{D}\dot{B}}\Psi_{CAP}{}^Q \qquad (7.213)$$

– $P - Q$ компоненты спинорных матрица тензора Вейля с компонентами:

$$C_{0\dot{0}0\dot{0}} = \begin{pmatrix} \Psi_1 & -\Psi_0 \\ \Psi_2 & -\Psi_1 \end{pmatrix}, \quad C_{1\dot{1}1\dot{0}} = \begin{pmatrix} \Psi_3 & -\Psi_2 \\ \Psi_4 & -\Psi_3 \end{pmatrix},$$
$$C_{1\dot{1}0\dot{0}} = \begin{pmatrix} \Psi_2 & -\Psi_1 \\ \Psi_3 & -\Psi_2 \end{pmatrix}, \quad C_{1\dot{0}0\dot{1}} = \begin{pmatrix} -\Psi_2 & \Psi_1 \\ -\Psi_3 & \Psi_2 \end{pmatrix}, \qquad (7.214)$$

а со спинорами $\Lambda\varepsilon_{\dot D\dot B}(\varepsilon_{PC}\delta^A{}_Q+\varepsilon_{PA}\delta_C{}^Q)$ и $\varepsilon_{CA}\Phi_P{}^Q{}_{\dot D\dot B}$ связаны след и бесследовая части тензора Риччи

$$\Lambda\varepsilon_{AB}\varepsilon_{\dot C\dot D}=-\frac{1}{4}\sigma^k{}_{A\dot C}\sigma^n{}_{B\dot D}Rg_{kn}, \tag{7.215}$$

$$\Phi_{AB\dot C\dot D}=\frac{1}{2}\sigma^k{}_{A\dot C}\sigma^n{}_{B\dot D}\left(R_{kn}-\frac{1}{4}g_{kn}R\right). \tag{7.216}$$

Подставляя соотношения (7.215) и (7.216) в уравнения (7.211) и умножая полученное выражение на $\sigma^{A\dot C}{}_k\sigma^{B\dot D}{}_n$, получим уравнения $(B.1)$.

Представим матрицу $R_{A\dot BC\dot D}$ в виде суммы

$$R_{A\dot BC\dot D}=C_{A\dot BC\dot D}+\nu J_{A\dot BC\dot D}, \tag{7.217}$$

где матричный ток $J_{A\dot BC\dot D}$ имеет следующие компоненты [57]:

$$J_{0\dot 10\dot 0}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0\\T/6&0\end{pmatrix},\quad J_{1\dot 11\dot 0}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-T/6\\0&0\end{pmatrix},$$

$$J_{1\dot 00\dot 0}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}T_{1\dot 00\dot 0}&-T_{0\dot 00\dot 0}\\T_{1\dot 01\dot 0}&-T_{1\dot 00\dot 0}\end{pmatrix},$$

$$J_{1\dot 10\dot 1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}T_{0\dot 11\dot 1}&-T_{0\dot 10\dot 1}\\T_{1\dot 11\dot 1}&-T_{0\dot 11\dot 1}\end{pmatrix}, \tag{7.218}$$

$$J_{1\dot 10\dot 0}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}T_{1\dot 10\dot 0}&-T_{0\dot 10\dot 0}\\T_{1\dot 01\dot 1}&-T_{1\dot 10\dot 0}\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}T/6&0\\0&-T/6\end{pmatrix},$$

$$J_{1\dot 00\dot 1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}T_{1\dot 10\dot 0}&-T_{0\dot 10\dot 0}\\T_{1\dot 01\dot 1}&-T_{1\dot 10\dot 0}\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-T/6&0\\0&T/6\end{pmatrix}.$$

Здесь

$$T_{A\dot BC\dot D}=\sigma^k{}_{A\dot C}\sigma^n{}_{B\dot D}T_{kn}, \tag{7.219}$$

$$T=g^{jm}T_{jm}, \tag{7.220}$$

а тензор энергии-импульса $T_{kn}$ определяется через коэффициенты вращения Риччи согласно соотношению

$$T_{jm}=-\frac{2}{\nu}\{(\nabla_{[i}T^i{}_{|j|m]}+T^i{}_{s[i}T^s{}_{|j|m]})-$$
$$-\frac{1}{2}g_{jm}g^{pn}(\nabla_{[i}T^i{}_{|p|n]}+T^i{}_{s[i}T^s{}_{|p|n]})\}. \tag{7.221}$$

В частном случае, когда поле $T^i{}_{jk}$ антисимметрично по всем трем индексам, тензор (7.219) [40]

$$T_{jm}=\frac{1}{\nu}\left(\hat\Omega_j\hat\Omega_m-\frac{1}{2}g_{jm}\hat\Omega^i\hat\Omega_i\right). \tag{7.222}$$

Умножая это соотношение на $\sigma^j{}_{A\dot{C}}\sigma^m{}_{B\dot{D}}$ и используя соответствие (7.199), имеем

$$T_{A\dot{B}C\dot{D}} = \frac{1}{\nu}\left(\mu_{A\dot{B}}\mu_{C\dot{D}} - \frac{1}{2}\varepsilon_{AC}\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}\mu_{P\dot{Q}}\mu^{P\dot{Q}}\right). \tag{7.223}$$

Кроме того, находим

$$T = g^{jm}T_{jm} = -\frac{1}{\nu}\hat{\Omega}_j\hat{\Omega}^j = -\frac{1}{\nu}\mu_{P\dot{Q}}\mu^{P\dot{Q}}, \tag{7.224}$$

откуда следует «плотность спинорной материи» следующего вида:

$$\rho = -\frac{1}{\nu c^2}\mu_{P\dot{Q}}\mu^{P\dot{Q}}. \tag{7.225}$$

Подставив равенство (7.217) в спинорные уравнения $(B^{s^+})$, запишем их в виде

$$2\Phi_{AB\dot{C}\dot{D}} + \Lambda\varepsilon_{AB}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} = \nu T_{A\dot{C}B\dot{D}}, \tag{$B^{s^+}.1$}$$

$$C_{A\dot{B}C\dot{D}} - \partial_{C\dot{D}}T_{A\dot{B}} + \partial_{A\dot{B}}T_{C\dot{D}} + (T_{C\dot{D}})^F_A T_{F\dot{B}} + (T^+_{\dot{D}C})^{\dot{F}}_{\dot{B}}T_{A\dot{F}} -$$

$$-(T_{A\dot{B}})^F_C T_{F\dot{D}} - (T^+_{\dot{B}A})^{\dot{F}}_{\dot{D}}T_{C\dot{F}} - [T_{A\dot{B}}, T_{C\dot{D}}] = -\nu J_{A\dot{B}C\dot{D}}. \tag{$B^{s^+}.2$}$$

Подводя итоги, запишем расширенную спинорную систему уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса в виде

$$\partial_{C\dot{D}}\sigma^i_{A\dot{B}} - \partial_{A\dot{B}}\sigma^i_{C\dot{D}} = (T_{C\dot{D}})^P_A\sigma^i_{P\dot{B}} + \sigma^i_{A\dot{R}}(T^+_{\dot{D}C})^{\dot{R}}_{\dot{B}} -$$

$$-(T_{A\dot{B}})^P_C\sigma^i_{P\dot{D}} - \sigma^i_{C\dot{R}}(T^+_{\dot{B}A})^{\dot{R}}_{\dot{D}}, \tag{$A^s$}$$

$$2\Phi_{AB\dot{C}\dot{D}} + \Lambda\varepsilon_{AB}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} = \nu T_{A\dot{C}B\dot{D}}, \tag{$B^{s^+}.1$}$$

$$C_{A\dot{B}C\dot{D}} - \partial_{C\dot{D}}T_{A\dot{B}} + \partial_{A\dot{B}}T_{C\dot{D}} + (T_{C\dot{D}})^F_A T_{F\dot{B}} + (T^+_{\dot{D}C})^{\dot{F}}_{\dot{B}}T_{A\dot{F}} -$$

$$-(T_{A\dot{B}})^F_C T_{F\dot{D}} - (T^+_{\dot{B}A})^{\dot{F}}_{\dot{D}}T_{C\dot{F}} - [T_{A\dot{B}}, T_{C\dot{D}}] = -\nu J_{A\dot{B}C\dot{D}}. \tag{$B^{s^+}.2$}$$

Здесь спинорные индексы пробегают значения $A, B, D\ldots = 0, 1$, $\dot{A}, \dot{B}, \dot{D}\ldots = \dot{0}, \dot{1}$.

## 7.10 Формализм двухкомпонентных спиноров

Введем двухкомпонентные спиноры $o^\alpha$ и $\iota^\alpha$ [58], связанные с компонентами спинорной диады $\xi^\alpha_\beta$ следующим образом:

$$\xi^\alpha_0 = o^\alpha, \quad \xi^\alpha_1 = \iota^\alpha, \quad \overline{\xi}^{\dot{\alpha}}_{\dot{0}} = \overline{o}^{\dot{\alpha}}, \quad \overline{\xi}^{\dot{\alpha}}_{\dot{1}} = \overline{\iota}^{\dot{\alpha}}, \tag{7.226}$$

$$\alpha, \beta\ldots = 0, 1, \quad \dot{\alpha}, \dot{\beta}\ldots = \dot{0}, \dot{1}.$$

Из условий ортогональности спинорной диады

$$\begin{aligned} \xi^0_\alpha \xi^\alpha_1 &= 1, \\ \xi^\alpha_0 \xi^0_\alpha = -\xi^0_\alpha \xi^\alpha_0 &= 0, \\ \xi^\alpha_1 \xi^1_\alpha &= 0. \end{aligned} \tag{7.227}$$

$$\begin{aligned} \xi^0_\alpha \xi^\beta_0 - \xi^1_\alpha \xi^\beta_0 &= \delta^\beta_\alpha, \\ \xi^0_\alpha \xi^1_\beta - \xi^1_\alpha \xi^0_\beta &= \varepsilon_{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{7.228}$$

где

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} = \varepsilon_{\dot\gamma\dot\delta} = \varepsilon^{\dot\gamma\dot\delta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.229}$$

следует условие нормировки для двухкомпонентных спиноров:

$$\begin{aligned} o_\alpha \iota^\alpha = -\iota_\alpha o^\alpha &= 1, \\ o^\alpha o_\alpha = -o_\alpha o^\alpha = 0, \quad \iota^\alpha \iota_\alpha &= 0, \end{aligned} \tag{7.230}$$

а также соотношения

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = o^\alpha \iota^\beta - \iota^\alpha o^\beta, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = o_\alpha \iota_\beta - o_\beta \iota_\alpha, \quad \varepsilon^\beta_\alpha = o_\alpha \iota^\beta - \iota_\alpha o^\beta.$$

Спиноры $o^\alpha$ и $i^\beta$ определяют компоненты символов Ньюмена–Пенроуза (7.6)

$$\sigma^i_{A\dot B} = \sigma^i_{\alpha\dot\beta} \xi^\alpha_A \overline{\xi}^{\dot\beta}_{\dot B} \tag{7.231}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma^i_{0\dot 0} = \sigma^i_{\alpha\dot\beta} o^\alpha \overline{o}^{\dot\beta} = l^i, \quad \sigma^i_{1\dot 1} = \sigma^i_{\alpha\dot\beta} \iota^\alpha \overline{\iota}^{\dot\beta} = n^i, \\ \sigma^i_{0\dot 1} = \sigma^i_{\alpha\dot\beta} o^\alpha \overline{\iota}^{\dot\beta} = m^i, \quad \sigma^i_{1\dot 0} = \sigma^i_{\alpha\dot\beta} \iota^\alpha \overline{o}^{\dot\beta} = \overline{m}^i. \end{aligned} \tag{7.232}$$

Вектора $l^i$, $n^i$, $m^i$ и $\overline{m}^i$ образуют изотропную тетраду. Обычная тетрада $e^i{}_a$ может быть получена из векторов изотропной тетрады посредством соотношений:

$$\begin{aligned} e^i{}_0 &= (2)^{-1/2}(l^i + n^i) = (2)^{-1/2}\sigma^i_{\alpha\dot\beta}(o^\alpha \overline{o}^{\dot\beta} + \iota^\alpha \overline{\iota}^{\dot\beta}), \\ e^i{}_1 &= (2)^{-1/2}(m^i + \overline{m}^i) = (2)^{-1/2}\sigma^i_{\alpha\dot\beta}(o^\alpha \overline{\iota}^{\dot\beta} + \iota^\alpha \overline{o}^{\dot\beta}), \\ e^i{}_2 &= (2)^{-1/2} i(m^i - \overline{m}^i) = (2)^{-1/2}\sigma^i_{\alpha\dot\beta}(o^\alpha \overline{\iota}^{\dot\beta} - \iota^\alpha \overline{o}^{\dot\beta}), \\ e^i{}_3 &= (2)^{-1/2}(l^i - n^i) = (2)^{-1/2}\sigma^i_{\alpha\dot\beta}(o^\alpha \overline{o}^{\dot\beta} - \iota^\alpha \overline{\iota}^{\dot\beta}). \end{aligned} \tag{7.233}$$

Используя соотношения

$$T_{ACk} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot B\dot D}\sigma^i_{C\dot D}\nabla_k \sigma_{A\dot B i}, \tag{7.234}$$

$$\nabla_{\alpha\dot\beta} = \sigma^i_{\alpha\dot\beta}\nabla_i, \tag{7.235}$$

находим следующие выражения для компонент матриц Кармели [31]:

$$\begin{aligned}
-\kappa &= o^\alpha\overline{o}^{\dot\beta}o^\gamma\nabla_{\alpha\dot\beta}o_\gamma, & -\lambda &= \iota^\alpha\overline{o}^{\dot\beta}\iota^\gamma\nabla_{\alpha\dot\beta}\iota_\gamma,\\
-\rho &= \iota^\alpha\overline{o}^{\dot\beta}o^\gamma\nabla_{\alpha\dot\beta}o_\gamma, & -\pi &= o^\alpha\overline{o}^{\dot\beta}\iota^\gamma\nabla_{\alpha\dot\beta}\iota_\gamma,\\
-\sigma &= o^\alpha\overline{\iota}^{\dot\beta}o^\gamma\nabla_{\alpha\dot\beta}o_\gamma, & -\varepsilon &= o^\alpha\overline{o}^{\dot\beta}\iota^\gamma\nabla_{\alpha\dot\beta}o_\gamma,\\
-\tau &= \iota^\alpha\overline{\iota}^{\dot\beta}o^\gamma\nabla_{\alpha\dot\beta}o_\gamma, & -\beta &= o^\alpha\overline{\iota}^{\dot\beta}\iota^\gamma\nabla_{\alpha\dot\beta}o_\gamma,\\
-\nu &= \iota^\alpha\overline{\iota}^{\dot\beta}\iota^\gamma\nabla_{\alpha\dot\beta}\iota_\gamma, & -\gamma &= \iota^\alpha\overline{\iota}^{\dot\beta}o^\gamma\nabla_{\alpha\dot\beta}\iota_\gamma,\\
-\mu &= o^\alpha\overline{\iota}^{\dot\beta}\iota^\gamma\nabla_{\alpha\dot\beta}\iota_\gamma, & -\alpha &= \iota^\alpha\overline{o}^{\dot\beta}o^\gamma\nabla_{\alpha\dot\beta}\iota_\gamma,
\end{aligned} \tag{7.236}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= \Psi_{\alpha\beta\chi\delta}o^\alpha o^\beta o^\chi o^\delta, & \Psi_1 &= \Psi_{\alpha\beta\chi\delta}o^\alpha o^\beta o^\chi\iota^\delta,\\
\Psi_2 &= \Psi_{\alpha\beta\chi\delta}o^\alpha o^\beta\iota^\chi\iota^\delta, & \Psi_3 &= \Psi_{\alpha\beta\chi\delta}o^\alpha\iota^\beta\iota^\chi\iota^\delta,
\end{aligned} \tag{7.237}$$

$$\Psi_4 = \Psi_{\alpha\beta\chi\delta}\iota^\alpha\iota^\beta\iota^\chi\iota^\delta,$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{00} &= \overline{\Phi}_{00} = \Phi_{\alpha\beta\dot\chi\dot\delta}o^\alpha o^\beta\overline{o}^{\dot\chi}\overline{o}^{\dot\delta}, & \Phi_{01} &= \overline{\Phi}_{10} = \Phi_{\alpha\beta\dot\chi\dot\delta}o^\alpha o^\beta\overline{o}^{\dot\chi}\overline{\iota}^{\dot\delta},\\
\Phi_{02} &= \overline{\Phi}_{2} = \Phi_{\alpha\beta\dot\chi\dot\delta}o^\alpha o^\beta\overline{\iota}^{\dot\chi}\overline{\iota}^{\dot\delta}, & \Phi_{11} &= \overline{\Phi}_{11} = \Phi_{\alpha\beta\dot\chi\dot\delta}o^\alpha\iota^\beta\overline{o}^{\dot\chi}\overline{\iota}^{\dot\delta},\\
\Phi_{12} &= \overline{\Phi}_{21} = \Phi_{\alpha\beta\dot\chi\dot\delta}o^\alpha\iota^\beta\overline{\iota}^{\dot\chi}\overline{\iota}^{\dot\delta}, & \Phi_{22} &= \overline{\Phi}_{22} = \Phi_{\alpha\beta\dot\chi\dot\delta}\iota^\alpha\iota^\beta\overline{\iota}^{\dot\chi}\overline{\iota}^{\dot\delta}.
\end{aligned} \tag{7.238}$$

Из соотношений (7.236) следует

$$\begin{aligned}
\nabla_{\beta\dot\chi}o_\alpha = {}&\gamma o_\alpha o_\beta\overline{o}_{\dot\chi} - \alpha o_\alpha o_\beta\overline{\iota}_{\dot\chi} - \beta o_\alpha\iota_\beta\overline{o}_{\dot\chi} + \varepsilon o_\alpha\iota_\beta\overline{\iota}_{\dot\chi} -\\
&-\tau\iota_\alpha o_\beta\overline{o}_{\dot\chi} + \rho\iota_\alpha o_\beta\overline{\iota}_{\dot\chi} + \sigma\iota_\alpha\iota_\beta\overline{o}_{\dot\chi} - \kappa\iota_\alpha\iota_\beta\overline{\iota}_{\dot\chi},
\end{aligned} \tag{7.239}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\beta\dot\chi}\iota_\alpha = {}&\nu o_\alpha o_\beta\overline{o}_{\dot\chi} - \lambda o_\alpha o_\beta\overline{\iota}_{\dot\chi} - \mu o_\alpha\iota_\beta\overline{o}_{\dot\chi} + \pi o_\alpha\iota_\beta\overline{\iota}_{\dot\chi} -\\
&-\gamma\iota_\alpha o_\beta\overline{o}_{\dot\chi} + \alpha\iota_\alpha o_\beta\overline{\iota}_{\dot\chi} + \beta\iota_\alpha\iota_\beta\overline{o}_{\dot\chi} - \varepsilon\iota_\alpha\iota_\beta\overline{\iota}_{\dot\chi}.
\end{aligned} \tag{7.240}$$

Компоненты спинорной производной (7.114) через двухкомпонентные спиноры представляются как

$$\begin{aligned}
D &= -o^\alpha\overline{o}^{\dot\beta}\nabla_{\alpha\dot\beta}, & \Delta &= -\iota^\alpha\overline{\iota}^{\dot\beta}\nabla_{\alpha\dot\beta},\\
\delta &= -o^\alpha\overline{\iota}^{\dot\beta}\nabla_{\alpha\dot\beta}, & \overline{\delta} &= -\iota^\alpha\overline{o}^{\dot\beta}\nabla_{\alpha\dot\beta}.
\end{aligned} \tag{7.241}$$

В формализме двухкомпонентных спиноров существует так называемый модифицированный формализм [58], который учитывает «штрихованную» симметрию спинорных величин. Эта симметрия позволяет производить замену

$$\begin{aligned}
o^\alpha &\to i\iota^\alpha, & \iota^\alpha &\to io^\alpha,\\
\overline{o}^{\dot\alpha} &\to -i\overline{\iota}^{\dot\alpha}, & \overline{\iota}^{\dot\alpha} &\to -i\overline{o}^{\dot\alpha},
\end{aligned} \tag{7.242}$$

при которой нештрихованные величины заменяются на штрихованные по правилу

$$(l^i)' = n^i, \quad (m^i)' = \overline{m}^i, \quad (\overline{m}^i)' = m^i, \quad (n^i)' = l^i, \tag{7.243}$$

$$\begin{array}{lll} \nu = -\kappa', & \lambda = -o', & \mu = -\rho', \\ \pi = -\tau', & \alpha = -\beta', & \gamma = -\varepsilon'. \end{array} \tag{7.244}$$

Благодаря указанному свойству симметрии можно заменить в соотношениях (7.236) нештрихованные величины на штрихованные

$$\begin{array}{ll} -\kappa = \overline{o}^{\dot{\alpha}} o^{\beta} o^{\gamma} \nabla_{\alpha\dot{\beta}} o_{\gamma}, & \sigma' = \overline{\iota}^{\dot{\alpha}} o^{\beta} \iota^{\gamma} \nabla_{\alpha\dot{\beta}} \iota_{\gamma}, \\ -\rho = \iota^{\alpha} \overline{o}^{\dot{\beta}} o^{\gamma} \nabla_{\alpha\dot{\beta}} o_{\gamma}, & \tau' = o^{\alpha} \overline{o}^{\dot{\beta}} \iota^{\gamma} \nabla_{\alpha\dot{\beta}} \iota_{\gamma}, \\ -\sigma = o^{\alpha} \overline{\iota}^{\dot{\beta}} o^{\gamma} \nabla_{\alpha\dot{\beta}} o_{\gamma}, & -\varepsilon = o^{\alpha} \overline{o}^{\dot{\beta}} \iota^{\gamma} \nabla_{\alpha\dot{\beta}} o_{\gamma}, \\ -\tau = \iota^{\alpha} \overline{\iota}^{\dot{\beta}} o^{\gamma} \nabla_{\alpha\dot{\beta}} o_{\gamma}, & -\beta = o^{\alpha} \overline{\iota}^{\dot{\beta}} \iota^{\gamma} \nabla_{\alpha\dot{\beta}} o_{\gamma}, \\ \kappa' = \iota^{\alpha} \overline{\iota}^{\dot{\beta}} \iota^{\gamma} \nabla_{\alpha\dot{\beta}} \iota_{\gamma}, & \varepsilon' = \iota^{\alpha} \overline{\iota}^{\dot{\beta}} o^{\gamma} \nabla_{\alpha\dot{\beta}} \iota_{\gamma}, \\ \rho' = o^{\alpha} \overline{\iota}^{\dot{\beta}} \iota^{\gamma} \nabla_{\alpha\dot{\beta}} \iota_{\gamma}, & \beta' = \iota^{\alpha} \overline{o}^{\dot{\beta}} o^{\gamma} \nabla_{\alpha\dot{\beta}} \iota_{\gamma}, \end{array} \tag{7.245}$$

рассматривая вместо 12 спинорных коэффициентов только 6.

Наиболее общее преобразование, сохраняющее спиноры $o^{\alpha}$, $\iota^{\alpha}$ и условия (7.230), задается в виде

$$o^{\alpha} \to C o^{\alpha}, \quad \iota^{\alpha} \to C^{-1} \iota^{\alpha}, \tag{7.246}$$

где $C$ – комплексное, образующее подгруппу бустов и трехмерных вращений. Компоненты изотропной тетрады (7.232) изменяются при этих преобразованиях так:

$$\begin{array}{r} l_i \to A^{-1} l_i, \quad n_i \to A n_i, \quad m_i \to e^{i\theta} m_i, \\ A = C\overline{C}, \quad e^{i\theta} = C\overline{C}^{-1}. \end{array} \tag{7.247}$$

Определим скалярную величину со следующими свойствами преобразования:

$$\eta \to C^p \overline{C}^q \eta. \tag{7.248}$$

Эту величину называют спиновым и бустовым весовым скаляром типа $(p, q)$ [58]. Из соотношений (7.246) следует, что компоненты спиноров $o^{\alpha}$ и $\iota^{\alpha}$ являются скалярами соответственно типов $(1, 0)$ и $(-1, 0)$. Для компонент изотропной тетрады имеем

$$l^i : (1,1), \ n^i : (-1,-1), m^i : (1,-1), \ \overline{m}^i : (-1,1). \tag{7.249}$$

Относительно преобразований (7.247) все спиновые коэффициенты (7.236) разбиваются на два класса:

а) величины, имеющие однородные законы преобразования, например

$$\sigma \to (C o^{\alpha})(\overline{C}^{-1} \overline{\iota}^{\dot{\alpha}})(C o^{\beta}) \nabla_{\alpha\dot{\alpha}} (C o_{\beta}) = C^3 \overline{C}^{-1} \sigma; \tag{7.250}$$

б) величины с неоднородным законом преобразования, содержащим производные от $C$, например

$$\beta \to (Co^\alpha)(\overline{C}^{-1}\overline{\iota}^{\dot{\alpha}})(C^{-1}\iota^\beta)\nabla_{\alpha\dot{\alpha}}(Co_\beta) = \\ = C\overline{C}^{-1}\beta + \overline{C}^{-1}o^\alpha\overline{\iota}^{\dot{\alpha}}\nabla_{\alpha\dot{\alpha}}C. \quad (7.251)$$

Учитывая «штрихованную» симметрию, а также спиновые и бустовые веса, имеем для основных спинорных величин

$$\begin{array}{llll} \kappa\ :(3,1), & \sigma\ :(3,-1), & \rho\ :(1,1), & \tau\ :(1,-1), \\ \kappa'\ :(-3,-1), & \sigma'\ :(-3,1), & \rho'\ :(-1,-1), & \tau'\ :(-1,1), \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \Psi_0 = \Psi_4' : (4,0), & \Psi_1 = \Psi_3' : (2,0), \\ \Psi_2 = \Psi_2' : (0,0), & \Psi_3 = \Psi_1' : (-2,0), \end{array}$$

$$\Psi_4 = \Psi_0' : (-4,0), \quad (7.252)$$

$$\begin{array}{ll} \Phi_{00} = \overline{\Phi}_{00} = \Phi_{22}' : (2,2), & \Phi_{01} = \overline{\Phi}_{10} = \Phi_{21}' : (2,0), \\ \Phi_{02} = \overline{\Phi}_{20} = \Phi_{20}' : (2,-2), & \Phi_{10} = \overline{\Phi}_{01} = \Phi_{12}' : (0,2), \\ \Phi_{11} = \overline{\Phi}_{11} = \Phi_{11}' : (0,0), & \Phi_{12} = \overline{\Phi}_{21} = \Phi_{10}' : (0,-2), \\ \Phi_{20} = \overline{\Phi}_{02} = \Phi_{02}' : (-2,+2), & \Phi_{21} = \overline{\Phi}_{12} = \Phi_{01}' : (-2,0), \end{array}$$

$$\Phi_{22} = \overline{\Phi}_{22} = \Phi_{00}' : (-2,-2),$$
$$\Lambda = \overline{\Lambda} = \Lambda' = R/24 : (0,0).$$

Для взвешенных величин вводятся новые дифференциальные операторы, действие которых на скаляр $\eta$ типа $\{p,q\}$ определяется как

$$\begin{array}{ll} P\eta = (D - p\varepsilon - q\overline{\varepsilon})\eta, & P'\eta = (\Delta + p\varepsilon' + q\overline{\varepsilon}')\eta, \\ \partial\eta = (\delta - p\beta + q\overline{\beta}')\eta, & \partial'\eta = (\overline{\delta} + p\beta - q\overline{\beta})\eta. \end{array} \quad (7.253)$$

Операторы (7.253) имеют следующие спиновые веса:

$$\begin{array}{ll} P : (1,1), & \partial : (1,-1), \\ P' : (-1,-1), & \partial' : (-1,1). \end{array} \quad (7.254)$$

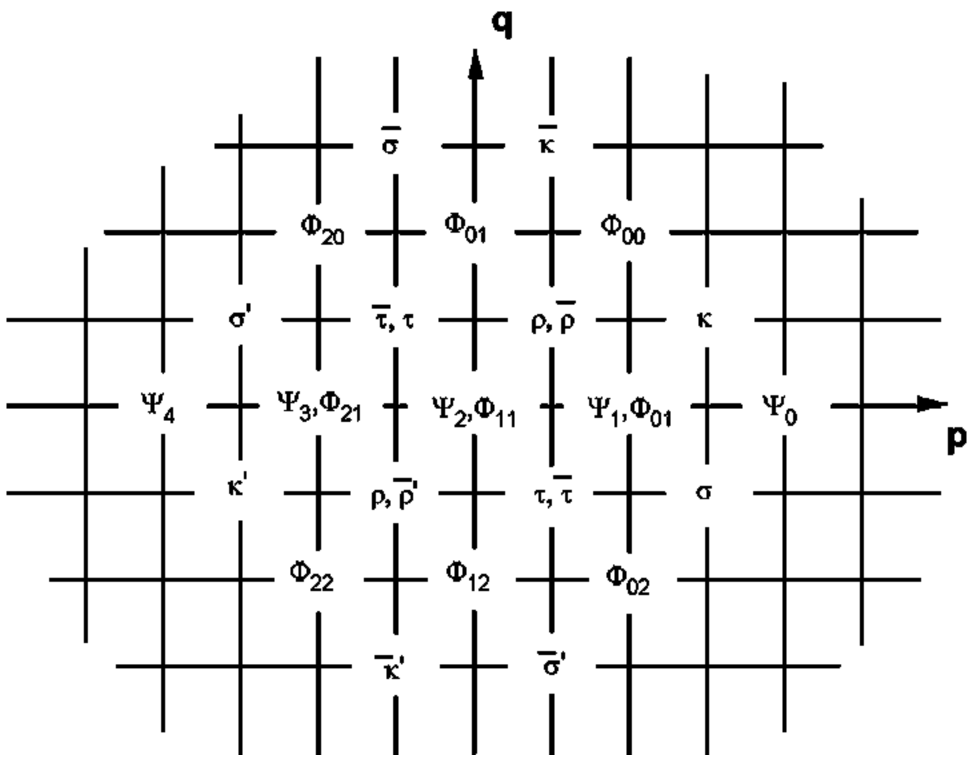


Рис. 7.1: Бустовые и спиновые веса основных спиноров, входящих в уравнения физического вакуума

Спинорные уравнения $(A^s)$ и $(B^{s+})$ можно записать в более простом виде [31], если использовать величины (7.252) и дифференциальные операторы (7.253). На рис.7.1 схематически показаны бустовые и спиновые веса основных спиноров геометрии $A_4$.

# Глава 8

# Конструирование решений структурных уравнений Картана геометрии абсолютного параллелизма

## 8.1 Выбор системы координат и специализация символов Ньюмена–Пенроуза

Структурные уравнения Картана любой геометрии описывают общую связь между основными геометрическими характеристиками данной геометрии. Частное решение структурных уравнений определяет конкретные геометрические величины, такие, как кривизна, связность, метрика и т.д., характерные для данного конкретного решения [59]. Для простоты исследуем структурные уравнения Картана геометрии $A_4$

$$\nabla_{[k}e^{a}{}_{m]} - e^{b}{}_{[k}T^{a}{}_{|b|m]} = 0, \tag{a}$$

$$R^{a}{}_{bkm} + 2\nabla_{[k}T^{a}{}_{|b|m]} + 2T^{a}{}_{c[k}T^{c}{}_{|b|m]} = 0, \tag{б}$$

записанные в векторном базисе, на предмет совместности. Эти уравнения представляют собой систему, состоящую в общем случае из 44 нелинейных дифференциальных уравнений (24 ($A$) и 20 ($B$)) в частных производных первого порядка, в которую в качестве неизвестных функций входят:

а) 6 компонент неголономной тетрады

$$e^{i}{}_{a} = \nabla_{a}x^{i}; \tag{8.1}$$

б) 24 компоненты коэффициентов вращения Риччи

$$T^a{}_{bk} = e^j{}_b \nabla_k e^a{}_j ; \tag{8.2}$$

в) 20 компонент тензора Римана

$$R^a{}_{bkm} . \tag{8.3}$$

Таким образом, в общем случае у нас имеется 44 уравнения для 50 неизвестных функций. Это обеспечивает свободу выбора системы координат $x^i$, тетрады $e^i{}_a$, а также величин $T^a{}_{bk}$ и $R^a{}_{bkm}$. Поэтому поиск конкретных решений системы уравнений $(A)$ и $(B)$ правильнее было бы назвать «конструированием решений».

Для конструирования решений удобно представить структурные уравнения Картана геометрии абсолютного параллелизма в спинорном $\Delta$-базисе через матрицы Кармели:

$$\partial_{C\dot{D}}\sigma^i{}_{A\dot{B}} - \partial_{A\dot{B}}\sigma^i_{C\dot{D}} = (T_{C\dot{D}})_A{}^P\sigma^i{}_{P\dot{B}} + \sigma^i{}_{A\dot{R}}(T^+_{\dot{D}C})^{\dot{R}}{}_{\dot{B}} -$$

$$-(T_{A\dot{B}})_C{}^P\sigma^i{}_{P\dot{D}} - \sigma^i_{C\dot{R}}(T^+_{\dot{B}A})^{\dot{R}}{}_{\dot{D}}, \tag{$A^s$}$$

$$R_{F\dot{E}D\dot{B}} = \partial_{D\dot{B}}T_{F\dot{E}} - \partial_{F\dot{E}}T_{D\dot{B}} - (T_{D\dot{B}})_F{}^S T_{S\dot{E}} - (T^+_{\dot{B}D})^{\dot{F}}{}_{\dot{E}}T_{F\dot{F}} +$$

$$+(T_{F\dot{E}})_D{}^S T_{S\dot{B}} + (T^+_{\dot{E}F})^{\dot{F}}{}_{\dot{B}}T_{D\dot{F}} + [T_{F\dot{E}}, T_{D\dot{B}}], \tag{$B^{s+}$}$$

где компоненты бесследовых $2 \times 2$ матриц $R_{F\dot{E}D\dot{B}}$ и $T_{F\dot{E}}$ определяются согласно соотношениям (7.88) и (7.103). Определим теперь символы Ньюмена–Пенроуза через спинорное представление инвариантной производной Хаяши [39]

$$\sigma_{A\dot{B}}{}^i = \nabla_{A\dot{B}}x^i = \partial_{A\dot{B}}x^i, \tag{8.4}$$

где компоненты спинорной производной $\partial_{A\dot{B}}$ обозначены как

$$\partial_{A\dot{B}} = \begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{\dot{B}} \\ A & \dot{0} & \dot{1} \\ \hline 0 & D & \delta \\ 1 & \bar{\delta} & \Delta \end{array} . \tag{8.5}$$

Учитывая соотношения (8.4), (8.5) и

$$\sigma^i{}_{A\dot{B}} = \begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{\dot{B}} \\ A & \dot{0} & \dot{1} \\ \hline 0 & l^i = (Y^0, V, Y^2, Y^3) & m^i = (\xi^0, \omega, \xi^2, \xi^3) \\ 1 & \overline{m}^i = (\overline{\xi}^0, \overline{\omega}, \overline{\xi}^2, \overline{\xi}^3) & n^i = (X^0, U, X^2, X^3) \end{array} , \tag{8.6}$$

находим

$$l^i = Dx^i, \quad n^i = \Delta x^i, \quad m^i = \delta x^i, \quad \overline{m}^{i^-} = \delta x^i, \tag{8.7}$$

а также

$$
\begin{array}{c}
Y^0 = Dx^0, X^0 = \Delta x^0, \xi^0 = \delta x^0, \overline{\xi}^0 = \overline{\delta} x^0,\\
V = Dx^1, U = \Delta x^1, \omega = \delta x^1, \overline{w} = \overline{\delta} x^1,\\
Y^2 = Dx^2, X^2 = \Delta x^2, \xi^2 = \delta x^2, \overline{\xi}^2 = \overline{\delta} x^2,\\
Y^3 = Dx^3, X^3 = \Delta x^3, \xi^3 = \delta x^3, \overline{\xi}^3 = \overline{\delta} x^3.
\end{array}
\tag{8.8}
$$

Из равенства

$$
\partial_{A\dot{B}} = \sigma_{A\dot{B}}{}^i \nabla_i \tag{8.9}
$$

и соотношений (8.5), (8.6) следует

$$
D = l^i \nabla_i, \quad \Delta = n^i \nabla_i, \quad \delta = m^i \nabla_i, \quad \overline{\delta} = \overline{m}^i \nabla_i, \tag{8.10}
$$

или

$$
\begin{array}{c}
D = V \dfrac{\partial}{\partial x^1} + Y^\alpha \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha},\\
\Delta = V \dfrac{\partial}{\partial x^1} + X^\alpha \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha},\\
\delta = w \dfrac{\partial}{\partial x^1} + \xi^\alpha \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha},\\
\overline{\delta} = \overline{w} \dfrac{\partial}{\partial x^1} + \overline{\xi}^\alpha \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha},\\
\alpha = 0, 2, 3.
\end{array}
\tag{8.11}
$$

Используя эти соотношения, запишем вектора, составляющие матрицу (8.6), в виде

$$
\begin{array}{c}
l^i = V\delta_1^i + Y^\alpha \delta_\alpha^i,\\
n^i = U\delta_1^i + X^\alpha \delta_\alpha^i,\\
m^i = \omega\delta_1^i + \xi^\alpha \delta_\alpha^i,\\
\overline{m}^i = \overline{w}\delta_1^i + \overline{\xi}^\alpha \delta_\alpha^i.
\end{array}
\tag{8.12}
$$

Из условий ортогональности для символов Ньюмена–Пенроуза

$$
\sigma_i^{A\dot{B}} \sigma^j_{A\dot{B}} = \delta_i{}^j, \tag{8.13}
$$

$$
\sigma_i^{A\dot{B}} \sigma^i_{C\dot{E}} = \delta^A{}_C \delta^{\dot{B}}{}_{\dot{E}} \tag{8.14}
$$

следуют условия ортогональности для векторов (8.12):

$$
\begin{array}{r}
l_i l^i = m_i m^i = \overline{m}_i \overline{m}^i = n_i n^i = 0,\\
l_i n^i = -m_i \overline{m}^i = 1,\\
l_i m^i = l_i \overline{m}^i = n_i m^i = n_i \overline{m}^i = 0,
\end{array}
\tag{8.15}
$$

причем из формул

$$
g_{ij} = \varepsilon_{AC} \varepsilon_{\dot{B}\dot{D}} \sigma_i^{A\dot{B}} \sigma_j^{C\dot{D}}, \tag{8.16}
$$

$$\varepsilon_{00} = \varepsilon_{11} = 0, \quad \varepsilon_{01} = -1, \quad \varepsilon_{10} = 1$$

находим

$$g^{ij} = l^i n^j + l^j n^i - m^i \overline{m}^j - m^j \overline{m}^i. \tag{8.17}$$

Вектора, удовлетворяющие условиям ортогональности (8.15), являются нулевыми векторами и в физике обычно связываются с распространением излучения (с материей, не имеющей массы покоя), когда возникают понятия волновых фронтов, волн, лучей и т.д. При этом в пространстве вводятся семейства нулевых гиперповерхностей $u(x^i) = \mathrm{const}$.

Выберем вектор $l_i$ ортогональным к этим гиперповерхностям

$$l_i = u_{,i}. \tag{8.18}$$

Далее выберем координаты так, чтобы [60]

$$\begin{array}{ll} x^0 = u, & \\ x^1 = r, & \text{где } r \text{ — аффинный параметр вдоль нулевых} \\ & \qquad\qquad \text{геодезических,} \\ x^2, & \\ x^3, & \qquad \text{причем } x^{2,3} \text{ нумеруют лучи на каждой} \\ & \text{гиперповерхности и постоянны вдоль лучей.} \end{array} \tag{8.19}$$

При таком выборе координат вектора $l^i$ и $l_i$ имеют следующий вид:

$$l_i = u_{,i} = x^0_{,i} = \delta^0_i, \tag{8.20}$$

$$l^i = \frac{dx^i}{dx^1} = \frac{dx^i}{dr} = \delta_1{}^i, \tag{8.21}$$

или

$$l^i = (0, 1, 0, 0), \quad l_i = (1, 0, 0, 0). \tag{8.22}$$

Из условий ортогональности

$$l_i n^i = 1, \quad l_i m^i = 0$$

следует

$$\begin{aligned} n^i &= (1, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{X}^2, \boldsymbol{X}^3), \\ m^i &= (0, \omega, \xi^2, \xi^3), \end{aligned} \tag{8.23}$$

и соотношения (8.11) принимают вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \boldsymbol{V}\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial r}, \\ \boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{U}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^0} + \boldsymbol{X}^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta} &= \frac{\partial}{\partial u} + \boldsymbol{U}\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{X}^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}, \\ \delta = \omega\frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta} &= \omega\frac{\partial}{\partial r} + \xi^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}, \\ \delta = \overline{\omega}\frac{\partial}{\partial x^1} + \overline{\xi}^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta} &= \overline{\omega}\frac{\partial}{\partial r} + \overline{\xi}^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}, \end{aligned} \tag{8.24}$$

$$\beta = 2, 3.$$

Кроме того, для векторов (8.12) получим соотношения:

$$\begin{aligned} l^i &= \delta_1{}^i, \\ n^i &= \delta_0{}^i + U\delta_1^i + X^\beta \delta_\beta^i, \\ m^i &= \omega\delta_1{}^i + \xi^\beta\delta_\beta^i, \\ \overline{m}^i &= \overline{\omega}\delta_1^i + \overline{\xi}^\beta\delta_\beta^i, \\ &\beta = 2, 3. \end{aligned} \tag{8.25}$$

Поскольку

$$l^i = g^{ik} l_k = g^{ik}\delta_k^0 = g^{io} = \delta_1^i,$$

то метрический тензор имеет следующую структуру [61]:

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ 0 & g^{12} & g^{22} & g^{23} \\ 0 & g^{13} & g^{23} & g^{33} \end{pmatrix}. \tag{8.26}$$

Используя соотношения (8.17) и (8.25), находим

$$\begin{aligned} g^{22} &= 2(U - \overline{\omega}\omega), \\ g^{2\beta} &= X^\beta - (\xi^\beta\overline{\omega} + \overline{\xi}^\beta\omega), \\ g^{\gamma\delta} &= -(\xi^\gamma\overline{\xi}^\delta + \overline{\xi}^\gamma\xi^\delta), \\ &\gamma, \delta, \beta = 2, 3. \end{aligned} \tag{8.27}$$

Как видно из предыдущих рассуждений, выбранные координаты (8.19) и специализация символов Ньюмена–Пенроуза с помощью соотношения (8.18) позволили нам определить зависимость (8.27) и общий вид (8.26) метрического тензора $g^{ik}$ геометрии $A_4$.

## 8.2 Специализация спинорных компонент коэффициентов вращения Риччи

Спинорные структурные уравнения Картана ($A^s$) и ($B^s$) геометрии $A_4$ можно рассматривать как матрицу возможных геометрий абсолютного параллелизма, различающихся конкретным набором спинорных геометрических характеристик. Поэтому под решением спинорных структурных уравнений ($A^s$) и ($B^s$) (в данной системе координат) мы будем понимать набор переменных, состоящий в общем случае из:

а) 6 независимых компонент символов Ньюмена–Пенроуза

$$\sigma^i{}_{A\dot{B}}; \tag{8.28}$$

б) 24 независимых спинорных компонент коэффициентов вращения Риччи

$$T_{A\dot{B}}, \;\; T^{+}_{\dot{B}A}; \tag{8.29}$$

в) 20 независимых спинорных компонент тензора Римана

$$R_{A\dot{B}C\dot{D}}, \;\; R^{+}_{\dot{B}A\dot{D}C}, \tag{8.30}$$

превращающих уравнения $(A^s)$ и $(B^s)$ в тождества после подстановки их в эти уравнения.

При поиске тех или иных решений структурных уравнений $(A^s)$ и $(B^s)$ мы будем руководствоваться условиями симметрии, а также соображениями физического характера, например налагая на тензор Римана условия эйнштейновского вакуума

$$R_{ij} = 0, \tag{8.31}$$

которое в матрицах Кармели (7.103), (7.214) и (7.217) запишется как

$$R_{A\dot{B}C\dot{D}} = C_{A\dot{B}C\dot{D}} = 0.$$

Рассмотрим теперь ограничения, которые можно наложить на компоненты матриц (7.88), используя физические представления. Для этого обратимся к соотношению

$$\nabla_k \sigma^i_{\;C\dot{D}} = \left( (T_{A\dot{B}})^P_C \sigma^i_{\;P\dot{D}} + \sigma^i_{\;C\dot{R}} (T^{+}_{\dot{B}A})^{\dot{R}}_{\dot{D}} \right) \sigma^{A\dot{B}}_k \tag{8.32}$$

или

$$(T_{A\dot{B}})^P_C \sigma^i_{\;P\dot{D}} + \sigma^i_{\;C\dot{R}} (T^{+}_{\dot{B}A})^{\dot{R}}_{\dot{D}} = \nabla_k \sigma^i_{\;C\dot{D}} \sigma^k_{\;A\dot{B}}. \tag{8.33}$$

С помощью соотношений (8.6) и матриц (7.88) находим из (8.33)

(8.34)

$$l^k \nabla_k l^i = (\varepsilon + \overline{\varepsilon}) l^i - \overline{\kappa} m_i - \kappa \overline{m}^i, \tag{а}$$

$$n^k \nabla_k l^i = (\gamma + \overline{\gamma})^i - \overline{\tau} m_i - \tau \overline{m}^i, \tag{б}$$

$$m^k \nabla_k l^i = (\overline{\alpha} + \beta) l^i - \overline{\rho} m_i - \sigma \overline{m}^i, \tag{в}$$

$$\overline{m}^k \nabla_k l^i = (\alpha + \overline{\beta}) l^i - \rho m_i - \overline{\sigma} m^i; \tag{г}$$

(8.35)

$$l^k \nabla_k n^i = -(\varepsilon + \overline{\varepsilon}) n^i + \pi m_i + \overline{\pi} \overline{m}^i, \tag{a}$$

$$n^k \nabla_k n^i = -(\gamma + \overline{\gamma}) n^i + \nu m_i + \overline{\nu} \overline{m}^i, \tag{b}$$

$$m^k \nabla_k n^i = -(\overline{\alpha} + \beta) n^i + \mu m_i + \overline{\lambda} \overline{m}^i, \tag{c}$$

$$\overline{m}^k \nabla_k n^i = -(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) n^i + \overline{\mu} \overline{m}_i + \lambda m^i; \tag{d}$$

(8.36)

$$l^k \nabla_k m^i = (\varepsilon - \overline{\varepsilon}) m^i + \overline{\pi} l_i - \kappa n^i, \tag{a}$$

$$n^k\nabla_k m^i = (\gamma - \overline{\gamma})m^i + \overline{\nu}l_i - \tau n^i, \qquad (b)$$
$$m^k\nabla_k m^i = (\beta - \overline{\alpha})m^i + \overline{\lambda}l_i - \sigma n^i, \qquad (c)$$
$$\overline{m}^k\nabla_k m^i = (\alpha - \overline{\beta})m^i + \overline{\mu}l_i - \rho n^i; \qquad (d)$$

(8.37)

$$l^k\nabla_k \overline{m}^i = (\overline{\varepsilon} - \varepsilon)\overline{m}^i + \pi l_i - \overline{\kappa}n^i, \qquad (a)$$
$$n^k\nabla_k \overline{m}^i = (\overline{\gamma} - \gamma)\overline{m}^i + \nu l_i - \overline{\tau}n^i, \qquad (б)$$
$$m^k\nabla_k \overline{m}^i = (\overline{\alpha} - \beta)\overline{m}^i + \mu l_i - \overline{\rho}n^i, \qquad (c)$$
$$\overline{m}^k\nabla_k \overline{m}^i = (\overline{\beta} - \alpha)\overline{m}^i + \lambda l_i - \overline{\sigma}n^i. \qquad (d)$$

Отсюда, используя условия ортогональности (8.15), имеем

$$\kappa = \nabla_k l_i m^i l^k, \quad \nu = \nabla_k n_i \overline{m}^i n^k, \quad \rho = \nabla_k l_i m^i \overline{m}^k,$$
$$\mu = -\nabla_k n_i m^i m^k, \quad \sigma = \nabla_k l_i m^i m^k, \quad \lambda = -\nabla_k n_i \overline{m}^i \overline{m}^k,$$
$$\tau = \nabla_k l_i m^i n^k, \quad \pi = -\nabla_k n_i \overline{m}^i l^k,$$
$$\alpha = \frac{1}{2}(\nabla_k l_i n^i \overline{m}^k - \nabla_k m_i \overline{m}^i \overline{m}^k), \qquad (8.38)$$
$$\beta = \frac{1}{2}(\nabla_k l_i n^i m^k - \nabla_k m_i \overline{m}^i m^k),$$
$$\gamma = \frac{1}{2}(\nabla_k l_i n^i n^k - \nabla_k m_i \overline{m}^i n^k),$$
$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla_k l_i n^i n^k - \nabla_k m_i \overline{m}^i l^k).$$

С другой стороны, соотношения (8.32) можно записать как

(8.39)

$$\begin{aligned}\nabla_k l_j = \; & (\gamma + \overline{\gamma})l_k l_j - \\ & -\overline{\tau}l_k m_j - \tau l_k \overline{m}_j + (\varepsilon + \overline{\varepsilon})n_k l_j - \overline{\kappa}n_k m_j - \\ & -\kappa n_k \overline{m}_j - (\alpha + \overline{\beta})m_k l_j + \overline{\sigma}m_k m_j + \\ & +\rho m_k \overline{m}_j - (\overline{\alpha} + \beta)\overline{m}_k l_j + \\ & +\overline{\rho}\overline{m}_k m_j + \sigma \overline{m}_k \overline{m}_j,\end{aligned} \qquad (a)$$

$$\begin{aligned}\nabla_k n_j = \; & -(\gamma + \overline{\gamma})l_k n_j + \nu l_k m_j + \\ & +\overline{\nu}l_k \overline{m}_j - (\varepsilon + \overline{\varepsilon})n_k n_j + \pi n_k m_j + \\ & +\overline{\pi}n_k \overline{m}_j + (\alpha + \overline{\beta})m_k n_j - \\ & -\lambda m_k m_j - \overline{\mu}m_k \overline{m}_j + (\overline{\alpha} + \beta)\overline{m}_k n_j - \\ & -\mu \overline{m}_k m_j - \overline{\lambda}\overline{m}_k \overline{m}_j,\end{aligned} \qquad (b)$$

$$\begin{aligned}\nabla_k m_j = \; & (\gamma - \overline{\gamma})l_k m_j + \overline{\nu}l_k l_j - \\ & -\tau l_k n_j + (\varepsilon - \overline{\varepsilon})n_k m_j + \overline{\pi}n_k l_j - \\ & -\kappa n_k n_j + (\overline{\alpha} - \beta)\overline{m}_k m_j - \\ & -\overline{\mu}m_k l_j + \rho m_k n_j + (\overline{\beta} - \alpha)m_k m_j - \\ & -\overline{\mu}\overline{m}_k l_j + \sigma \overline{m}_k n_j,\end{aligned} \qquad (c)$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_k\overline{m}_j = \;& (\overline{\gamma}-\gamma)l_k\overline{m}_j + \nu l_k l_j - \overline{\tau} l_k n_j + \\
& +(\overline{\varepsilon}-\varepsilon)n_k\overline{m}_j - \pi n_k l_j - \\
& -\overline{\kappa} n_k n_j + (\alpha-\overline{\beta})m_k\overline{m}_j - \\
& -\mu\overline{m}_k l_j + \overline{\rho}\overline{m}_k n_j + (\beta-\overline{\alpha})\overline{m}_k\overline{m}_j - \\
& -\lambda m_k l_j + \overline{\sigma} m_k n_j ,
\end{aligned} \tag{d}
$$

Альтернируя эти соотношения по индексам $k$ и $j$, имеем

(8.40)

$$
\nabla_{[k}l_{j]} = -2\Re(\varepsilon)l_{[k}n_{j]} - (\overline{\tau}-\alpha-\overline{\beta})l_{[k}m_{j]} - \tag{a}
$$

$$
-(\tau-\overline{\alpha}-\beta)l_{[k}\overline{m}_{j]} - \overline{\kappa}n_{[k}m_{j]} - \kappa n_{[k}\overline{m}_{j]} + 2i\Im(\rho)m_{[k}\overline{m}_{j]},
$$

$$
\nabla_{[k}n_{j]} = -2\Re(\gamma)l_{[k}n_{j]} - (\pi-\alpha-\overline{\beta})n_{[k}m_{j]} - \tag{b}
$$

$$
-(\overline{\pi}-\overline{\alpha}-\beta)n_{[k}\overline{m}_{j]} + \nu l_{[k}m_{j]} - \overline{\nu} l_{[k}\overline{m}_{j]} + 2i\Im(\mu)m_{[k}\overline{m}_{j]},
$$

$$
\nabla_{[k}m_{j]} = -(\overline{\pi}+\tau)l_{[k}n_{j]} + \left(2i\Im(\gamma)+\overline{\mu}\right)l_{[k}m_{j]} + \tag{c}
$$

$$
+\overline{\lambda}l_{[k}\overline{m}_{j]} + \left(2i\Im(\varepsilon)-\rho\right)n_{[k}m_{j]} - \sigma n_{[k}\overline{m}_{j]} - (\overline{\alpha}-\beta)m_{[k}\overline{m}_{j]},
$$

$$
\nabla_{[k}\overline{m}_{j]} = -(\pi+\overline{\tau})l_{[k}n_{j]} + \left(-2i\Im(\gamma)+\mu\right)l_{[k}\overline{m}_{j]} + \tag{d}
$$

$$
+\lambda l_{[k}\overline{m}_{j]} + \left(-2i\Im(\varepsilon)-\overline{\rho}\right)n_{[k}\overline{m}_{j]} - \overline{\sigma}n_{[k}m_{j]} - (\alpha-\overline{\beta})\overline{m}_{[k}m_{j]}.
$$

Свертка уравнений (8.39) приводит к следующим соотношениям:

(8.41)

$$
\nabla_k l^k = -(\rho+\overline{\rho}) + \varepsilon + \overline{\varepsilon}, \tag{a}
$$

$$
\nabla_k n^k = -(\gamma+\overline{\gamma}) + \mu + \overline{\mu}, \tag{b}
$$

$$
\nabla_k m^k = -\overline{\alpha} + \overline{\pi} - \tau + \beta, \tag{c}
$$

$$
\nabla_k \overline{m}^k = -\alpha + \pi + \overline{\tau} + \overline{\beta}. \tag{d}
$$

Соотношения (8.34)–(8.41) оказываются весьма полезными при специализации спинорных компонент коэффициентов вращения Риччи. Действительно, потребуем, например, чтобы изотропный вектор $l^i$ удовлетворял уравнениям геодезических эйнштейновской теории гравитации

$$
l^k\nabla_k l^i = 0. \tag{8.42}
$$

Тогда из равенства (8.34a) следует

$$
(\varepsilon+\overline{\varepsilon})l^i - \overline{\kappa}m_i - \kappa\overline{m}^i = 0. \tag{8.43}
$$

Очевидно, что соотношение (8.43) выполняется, если на спинорные компоненты тензора Риччи накладываются следующие ограничения:

$$
(\varepsilon+\overline{\varepsilon}) = 0, \quad \kappa = \overline{\kappa} = 0. \tag{8.44}
$$

Условия параллельного переноса векторов $m^i$, $\overline{m}^i$ и $n^i$ в направлении $l^k$ теории гравитации Эйнштейна запишутся как

$$l^k \nabla_k m^i = 0, \quad l^k \nabla_k \overline{m}^i = 0, \quad l^k \nabla_k n^i = 0.$$

Из равенств (8.35a), (8.36a) и (8.37a) следует, что эти соотношения выполняются, если

$$\kappa = \overline{\kappa} = \pi = \overline{\pi} = \varepsilon = \overline{\varepsilon} = 0. \tag{8.45}$$

С изотропным вектором $l^i$ связаны три оптических параметра [30]:
а) растяжение

$$\theta = (\rho + \overline{\rho})\frac{1}{2} = 0,5\nabla_i l^i; \tag{8.46}$$

б) вращение

$$\omega = (\rho - \overline{\rho})(2)^{-1/2} = \left(\frac{1}{2}\nabla_{[k} l_{i]} \nabla^k l^i\right)^{1/2}; \tag{8.47}$$

в) сдвиг

$$|\hat{\sigma}| = (|\sigma\overline{\sigma}|)^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\nabla_{(k} l_{i)} \nabla^k l^i - \theta^2\right)^{1/2}. \tag{8.48}$$

Поскольку мы выбрали $l^i$ градиентным вектором ($l_i = u_{,i}$), то из соотношения (8.47) следует, что

$$\omega = 0, \quad \rho = \overline{\rho}. \tag{8.49}$$

Кроме того, в этом случае выполняется следующее равенство [53]:

$$\tau = \overline{\alpha} + \beta. \tag{8.50}$$

## 8.3 Специализация спинорных компонент тензора Римана

Для поиска конкретных решений структурных уравнений Картана геометрии $A_4$, имеющих физический смысл, полезно воспользоваться полностью геометризированными уравнениями Эйнштейна

$$2\Phi_{AB\dot{C}\dot{D}} + \Lambda\varepsilon_{AB}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} = \nu T_{A\dot{C}B\dot{D}}. \tag{8.51}$$

В гл. 6 было показано, что

$$\sigma^{A\dot{C}}{}_j \sigma^{B\dot{D}}{}_m (2\Phi_{AB\dot{C}\dot{D}} + \Lambda\varepsilon_{AB}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}}) = R_{jm} - \frac{1}{2}g_{jm}R, \tag{8.52}$$

$$\sigma^{A\dot{C}}{}_j \sigma^{B\dot{D}}{}_m \nu T_{A\dot{C}B\dot{D}} = \nu T_{jm}, \tag{8.53}$$

где геометризированный тензор энергии-импульса материи $T_{jm}$ определяется согласно соотношению (7.221). Рассматривая различные типы геометризированных тензоров (7.221), такие, например, как:

а) тензор энергии-импульса однородного пространства $A_4$

$$T^{(1)}_{jm} = -\tilde{\Lambda} g_{jm}, \quad \tilde{\Lambda} = \mathrm{const}; \tag{8.54}$$

б) вакуумный тензор Эйнштейна

$$T^{(2)}_{jm} = 0; \tag{8.55}$$

в) тензор энергии-импульса изотропного излучения

$$T^{(3)}_{jm} = \rho l_j l_m, \quad l^i l_i = 0 \tag{8.56}$$

и т.д., мы получаем различные ограничения на спинорные компоненты матрицы $R_{A\dot{B}C\dot{D}}$. Из соотношений (8.51)–(8.53) для тензоров типа (8.54) получаем следующие ограничения на компоненты матриц (7.103):

$$\Phi_{00} = \Phi_{22} = \Phi_{02} = \Phi_{20} = \Phi_{11} = \Phi_{01} = \Phi_{10} = \Phi_{12} = \Phi_{21} = 0,$$

$$\Psi_0 \neq 0, \quad \Psi_1 \neq 0, \quad \Psi_2 \neq 0, \quad \Psi_3 \neq 0, \quad \Psi_4 \neq 0, \tag{8.57}$$

$$\tilde{\Lambda} = \frac{R}{4} = 6\Lambda. \tag{8.58}$$

Одновременно условие (8.54) через соотношение (7.221) накладывает ограничения на компоненты матриц (7.88).

В случае эйнштейновского вакуума условие (8.55) необходимо рассматривать как уравнения, накладываемые на компоненты матриц (7.88). При этом в дополнение к равенствам (8.57) мы получаем соотношение

$$\Lambda = 0. \tag{8.59}$$

Для тензоров типа (8.56) имеем

$$\Phi_{00} = \Phi_{02} = \Phi_{20} = \Phi_{11} = \Phi_{01} = \Phi_{10} = \Phi_{12} = \Phi_{21} = \Lambda = 0,$$

$$\Phi = \Phi_{22} = \frac{\nu\rho}{2}, \tag{8.60}$$

$$\Psi_0 \neq 0, \quad \Psi_1 \neq 0, \quad \Psi_2 \neq 0, \quad \Psi_3 \neq 0, \quad \Psi_4 \neq 0.$$

Чтобы понять физическое значение каждой из спинорных компонент тензора Вейля $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ и $\Psi_4$, рассмотрим эти пять случаев (остальные компоненты равны нулю). В каждом из них имеются следующие алгебраические свойства для компонент тензора Вейля по классификации Петрова с соответствующим вектором распространения ($n_i$ или $l_i$):

а) тип N (или {4}) [62, 63] – $n_i$;
б) тип III (или {31}) – $n_i$;
в) тип D (или {22}) – $l_i$ и $n_i$;
г) тип III (или {31}) – $l_i$;
д) тип N (или {4}) – $l_i$.

Под вектором распространения подразумевается главное световое направление [30]. Если в пространстве $A_4$ выполняется условие эйнштейновского вакуума $R_{jm} = 0$ и вектор $l_i$ удовлетворяет уравнению

$$l_{[i}R_{j]km[n}l_{s]}l^k l^m = 0, \tag{8.61}$$

то вектор $l_i$ соответствует одному из четырех главных световых направлений тензора Римана; при этом выполняется условие

$$\Psi_0 = 0. \tag{8.62}$$

Если два или более главных световых направления совпадают с вектором распространения $l_i$, то выполняется соотношение

$$R_{ijk[m}l_{n]}l^j l^k = 0, \tag{8.63}$$

или

$$\Psi_0 = \Psi_1 = 0. \tag{8.64}$$

Согласно теореме Гольдберга–Сакса [64], из условия (8.64) следует

$$\sigma = \kappa = 0. \tag{8.65}$$

Простое доказательство этой теоремы дано в работе [30] с использованием вторых тождеств Банки $(D^{s^+})$.

Аналогично можно показать, что из условия [53]

$$\Psi_3 = \Psi_4 = 0 \tag{8.66}$$

следует

$$\nu = \lambda = 0. \tag{8.67}$$

## 8.4 Конструирование асимптотического поведения геометрии островного типа

Геометрию $A_4$ будем называть геометрией островного типа, если на бесконечности ее основные характеристики (метрика, связность, кривизна) совпадают с характеристиками плоского пространства.

Будем предполагать также, что выполняется условие эйнштейновского вакуума (8.31) и соотношения (8.45), (8.49), (8.50). При этих предположениях структурные уравнения Картана геометрии $A_4$ $(A^s)$, $(B^{s^+})$ и вторые тождества Бианки $(D^{s^+})$ удобно разбить на три группы уравнений.

### 8.4.1 Радиальные уравнения, содержащие производные по $r$

$$
\begin{aligned}
&D\xi^\alpha = \rho\xi^\alpha + \sigma\overline{\xi}^\alpha, && (a)\\
&D\omega = \rho\omega + \sigma\overline{\omega} - (\overline{\alpha} + \beta), && (b)\\
&DX^\alpha = (\overline{\alpha} + \beta)\overline{\xi}^\alpha + (\alpha + \overline{\beta})\overline{\xi}^\alpha, && (c)\\
&DU = (\overline{\alpha} + \beta)\overline{\omega} + (\alpha + \overline{\beta})\omega - (\gamma + \overline{\gamma}); && (d)
\end{aligned}
\tag{8.68}
$$

$$
\begin{aligned}
&D\rho = \rho^2 + \sigma\overline{\sigma}, && (a)\\
&D\sigma = 2\rho\sigma + \Psi_0, && (b)\\
&D\tau = \tau\rho + \overline{\tau}\sigma + \Psi_1, && (c)\\
&D\alpha = \alpha\rho + \beta\overline{\sigma}, && (d)\\
&D\beta = \beta\rho + \alpha\sigma + \Psi_1, && (e)\\
&D\gamma = \tau\alpha + \overline{\tau}\beta + \Psi_2, && (f)\\
&D\lambda = \lambda\rho + \mu\overline{\sigma}, && (g)\\
&D\mu = \mu\rho + \lambda\sigma + \Psi_2, && (h)\\
&D\nu = \tau\lambda + \overline{\tau}\mu + \Psi_3; && (i)
\end{aligned}
\tag{8.69}
$$

$$
\begin{aligned}
&D\Psi_1 - \overline{\delta}\Psi_0 = 4\rho\Psi_1 - 4\alpha\Psi_0, && (a)\\
&D\Psi_2 - \overline{\delta}\Psi = 3\rho\Psi_2 - 2\alpha\Psi_1 - \lambda\Psi_0, && (b)\\
&D\Psi_3 - \overline{\delta}\Psi_2 = 2\rho\Psi_3 - 2\alpha\Psi_1, && (c)\\
&D\Psi_4 - \overline{\delta}\Psi_3 = \rho\Psi_4 + 2\alpha\Psi_3 - 3\lambda\Psi_2. && (d)
\end{aligned}
\tag{8.70}
$$

### 8.4.2 Нерадиальные уравнения

$$
\begin{aligned}
&\delta X^\alpha - \Delta\xi^\alpha = (\mu + \overline{\gamma} - \gamma)\overline{\xi^\alpha} + \lambda\xi^\alpha, && (a)\\
&\delta\overline{\xi}^\alpha - \overline{\delta}\xi^\alpha = (\overline{\beta} - \alpha)\xi^\alpha + (\overline{\alpha} - \beta)\overline{\xi}^\alpha, && (b)\\
&\delta\overline{\omega} - \overline{\delta}\omega = (\overline{\beta} - \alpha)\omega + (\overline{\alpha} - \beta)\overline{\omega} + (\mu - \overline{\mu}), && (c)\\
&\delta U - \Delta\omega = (\mu + \overline{\gamma} - \gamma)\omega + \overline{\lambda}\overline{\omega} - \nu; && (d)
\end{aligned}
\tag{8.71}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta\lambda - \overline{\delta}\nu = 2\alpha\nu + (\overline{\gamma} - 3\gamma - \mu - \overline{\mu})\lambda - \Psi_4, && (a)\\
&\delta\rho - \delta\sigma = (\beta + \overline{\alpha})\rho + (\overline{\beta} - 3\alpha)\sigma - \Psi_1, && (b)\\
&\delta\alpha - \overline{\delta}\beta = \mu\rho - \lambda\sigma - 2\alpha\beta + \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} - \Psi_2, && (c)\\
&\delta\lambda - \overline{\delta}\mu = (\alpha + \overline{\beta})\mu + (\overline{\alpha} - 3\beta)\lambda - \Psi_3, && (d)\\
&\delta\nu - \Delta\mu = \mu\gamma + \overline{\gamma}\mu + \mu^2 - 2\nu\beta + \lambda\overline{\lambda}, && (e)\\
&\delta\gamma - \Delta\beta = \tau\mu + (\mu - \gamma + \overline{\gamma})\beta - \sigma\nu + \overline{\lambda}\alpha, && (f)\\
&\delta\tau - \Delta\sigma = 2\tau\beta + (\overline{\gamma} + \mu - 3\gamma)\sigma + \overline{\lambda}\rho, && (g)\\
&\Delta\rho - \overline{\delta}\tau = (\gamma + \overline{\gamma} - \overline{\mu})\rho - 2\alpha\tau - \lambda\sigma - \Psi_2, && (h)\\
&\Delta\alpha - \overline{\delta}\gamma = (\overline{\gamma} - \gamma - \overline{\mu})\alpha + \rho\nu - \tau\lambda - \lambda\beta - \Psi_3. && (i)
\end{aligned}
\tag{8.72}
$$

### 8.4.3 $U$-производные уравнения

$$
\begin{aligned}
&\Delta\Psi_0 - \delta\Psi_1 = (4\gamma - \mu)\Psi_0 - (4\tau + 2\beta)\Psi_1 + 3\sigma\Psi_2, && (a)\\
&\Delta\Psi_1 - \delta\Psi_2 = \nu\Psi_0 + (2\gamma - 2\mu)\Psi_1 + 2\sigma\Psi_3 - 3\tau\Psi_2, && (b)\\
&\Delta\Psi_2 - \delta\Psi_3 = 2\nu\Psi_1 - 3\mu\Psi_2 + (-2\tau + 2\beta)\Psi_3 + \sigma\Psi_4, && (c)\\
&\Delta\Psi_3 - \delta\Psi_4 = 3\nu\Psi_2 - (2\gamma + 4\mu)\Psi_3 + (-\tau + 4\beta)\Psi_4. && (d)
\end{aligned}
\tag{8.73}
$$

Предположим теперь, что структурные уравнения Картана геометрии $A_4$ описывают островную излучающую систему, при этом величина $\Psi_0$ ведет себя на асимптотике по координате $r$ как

$$
\Psi_0 = o(r^{-5}), \tag{8.74}
$$

причем

$$
D\Psi_0 = o(r^{-6}). \tag{8.75}
$$

Условие (8.74) выбрано из чисто физических соображений таким образом, чтобы выполнялось соответствие асимптотике квадрупольного излучения в линейном приближении теории гравитации Эйнштейна. Понятно, что мы могли бы задать другой тип асимптотики и получить другие асимптотические свойства островной геометрии $A_4$. В этом и состоит смысл выражения «конструирование геометрии».

Пусть теперь однородные возмущения по координатам $x^2$ и $x^3$ не меняют характера асимптотики (8.74) и (8.75), т.е.

$$
\begin{aligned}
d_\alpha\Psi_0 = o(r^{-5}), \ldots, d_\alpha d_\beta d_\gamma d_\delta\Psi_0 = o(r^{-5}),\\
d_\alpha D\Psi_0 = o(r^{-6}), \ldots, d_\alpha d_\beta d_\gamma d_\delta D\Psi_0 = o(r^{-6}),
\end{aligned}
\tag{8.76}
$$

где

$$
d_\alpha = \frac{\partial}{\partial X^\alpha}, \quad \alpha, \beta, \gamma \ldots = 2, 3.
$$

Используя соотношения (8.74)–(8.76), можно определить асимптотическое поведение всех других спинорных величин, входящих в уравнения

(8.68)–(8.73). Например, покажем, как определяются асимптотические свойства величин $\rho$ и $\sigma$. Введем матрицы [30]

$$P = \left\{ \begin{array}{cc} \rho & \sigma \\ \overline{\sigma} & \rho \end{array} \right\}, \quad Q = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \Psi_0 \\ \overline{\Psi}_0 & 0 \end{array} \right\}.$$

Тогда уравнения (8.69а), (8.69б) и комплексно сопряженные уравнения

$$\begin{array}{cc} D\rho = \rho^2 + \sigma\overline{\sigma}, & D\rho = \rho^2 + \sigma\overline{\sigma}, \\ D\sigma = 2\rho\sigma + \Psi_0, & D\overline{\sigma} = 2\rho\overline{\sigma} + \overline{\Psi}_0 \end{array} \tag{8.77}$$

запишутся как

$$DP = P^2 + Q. \tag{8.78}$$

Это уравнение имеет решение в виде

$$P = -(DY)^{-1}, \tag{8.79}$$

где

$$Y = \left( \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ \overline{y}_1 & \overline{y}_2 \end{array} \right) \tag{8.80}$$

есть несингулярное решение (для данного $P$) уравнения

$$DY = -PY. \tag{8.81}$$

Из соотношений (8.79) и (8.81) видно, что матрица (8.80) удовлетворяет уравнению

$$D^2Y = -QY. \tag{8.82}$$

Асимптотическое поведение решений уравнения (8.82) в том случае, если

$$\int r|\Psi_0|dr = o(1),$$

имеет вид [30]

$$DY = F + o(1), \tag{8.83}$$

$$Y = rF + o(r), \tag{8.84}$$

где $F$ – постоянная матрица. Поскольку в нашем случае $Q = o(r^{-5})$, то из соотношений (8.82) и (8.84) мы получим

$$D^2Y = -rQF + o(r^{-4}) = o(r^4). \tag{8.85}$$

Интегрируя это соотношение дважды, имеем

$$DY = F + o(r^{-3}), \tag{8.86}$$

$$Y = rF + E + o(r^{-2}), \tag{8.87}$$

где $E$ – постоянная матрица. Решение (8.79) теперь может быть записано в виде

$$P = -r^{-1}I + r^{-2}EF^{-1} + o(r^{-3}). \tag{8.88}$$

Здесь $E$ – несингулярная матрица, а $I$ – единичная. Если $F = 0$, то из соотношения (8.88) мы имеем

$$\rho = -r^{-1} + o(r^{-2}), \quad \sigma = o(r^{-2}). \tag{8.89}$$

Используя другие уравнения системы (8.68)–(8.73) и действуя подобным образом, можно найти следующие асимптотические свойства для величин, входящих в эти уравнения [30]:

$$\begin{array}{ll} \xi^{\beta} = o(r^{-1}), & \alpha, \beta, \lambda, \mu, \tau = o(r^{-1}), \\ X^{\beta}, \omega = o(1), & \nu, \gamma = o(1), \\ U = o(r), & \Psi_1 = o(r^{-4}), \end{array} \tag{8.90}$$

$$\Psi_2 = o(r^{-3}), \quad \Psi_3 = o(r^{-2}), \quad \Psi_4 = o(r^{-1}).$$

Дальнейшее уточнение асимптотических свойств величин (8.89) и (8.90) производится так [60]. Запишем соотношения (8.89) в виде

$$\begin{array}{c} \rho = -r^{-1} + g(r), \\ \sigma = h(r), \end{array} \tag{8.91}$$

где $g, h = o(r^{-2})$.

Подставляя соотношения (8.91) в уравнения (8.69а) и (8.69б), имеем

$$\begin{array}{c} Dg + 2r^{-1}g = g^2 + h\overline{h} = o(r^{-4}), \\ Dh + 2r^{-1}h = 2gh + \Psi_0 = o(r^{-4}). \end{array} \tag{8.92}$$

Решение этих уравнений будем искать сперва с точностью до членов порядка $o(r^{-3})$. Интегрируя уравнения, имеем для $g(r)$ [60]

$$\begin{array}{l} g = e^{-\int 2dr/r}\left\{\int e^{\int 2dr/r} o(r^{-4})dr + \rho^0\right\} = \\ = r^{-2}\left\{\int o(r^{-4})dr + \rho^0\right\} = \rho^0 r^{-2} + o(r^{-3}) \end{array} \tag{8.93}$$

и подобное же решение для $h(r)$. В равенстве (8.93) индекс 0 у константы интегрирования $\rho$ означает независимость ее от $r$. Следовательно,

$$\begin{array}{ll} \rho = -r^{-1} + \rho^0 r^{-2} + o(r^{-3}), & \rho^0 = \rho^0(u, x^{\alpha}), \\ \sigma = \sigma^0 r^{-2} + o(r^{-3}), & \sigma^0 = \sigma^0(u, x^{\alpha}), \end{array} \tag{8.94}$$

$$\alpha = 2, 3.$$

С помощью координатных преобразований $r' = r - r^0(u, x^{\alpha})$ член $\rho^0/r'^2$ может быть исключен, поэтому

$$\rho = -r^{-1} + o(r^{-3}),$$

$$\sigma = \sigma^0 r^{-2} + o(r^{-3}).$$

Снова полагая

$$\rho = -r^{-1} + g(r), \quad \sigma = \sigma^0 r^{-2} + h(r),$$

где

$$g(r), h(r) = o(r^{-3}), \tag{8.95}$$

и группируя все члены в уравнениях (8.69а) и (8.69б) вплоть до величин порядка $o(r^{-5})$, имеем

$$\begin{gathered} Dg + 2r^{-1}g = o(r^{-4}) = \sigma^0\overline{\sigma}^0 r^{-4} + o(r^{-5}), \\ Dh + 2r^{-1}h = o(r^{-5}). \end{gathered} \tag{8.96}$$

Интегрируя уравнения (8.95), находим

$$g = r^{-2}\left\{\int (\sigma^0\overline{\sigma}^0 r^{-4} + o(r^{-5}))r^2 dr + C_1\right\},$$

$$h = r^{-2}\left\{\int r^2 o(r^{-5}) + C_2\right\},$$

или

$$\begin{gathered} g = C_1 r^{-2} - \sigma^0\overline{\sigma}^0 r^{-3} + o(r^{-4}), \\ h = C_2 r^{-2} + o(r^{-4}). \end{gathered}$$

Из условий (8.95) следует

$$C_1 = C_2 = 0,$$

поэтому

$$\begin{gathered} \rho = -r^{-1} - \sigma^0\overline{\sigma}^0 r^{-3} + o(r^{-4}), \\ \sigma = \sigma^0 r^{-2} + o(r^{-4}). \end{gathered} \tag{8.97}$$

Повторяя эту процедуру, можно найти

$$\begin{gathered} \rho = -r^{-1} - \sigma^0\overline{\sigma}^0 r^{-3} + o(r^{-5}), \\ \sigma = \sigma^0 r^{-2} + (\sigma^0\overline{\sigma}^0 - 0,5\Psi_0^0) r^{-4} + o(r^{-5}). \end{gathered} \tag{8.98}$$

Этим же методом может быть определена асимптотическая зависимость от $r$ всех других переменных. Приведем результаты вычислений, полученные в работе [60]:

а) для спинорных компонент тензора Римана

(8.99)

$$\Psi_0 = \Psi_0^0 r^{-5} + o(r^{-6}), \tag{а}$$

$$\Psi_1 = \Psi_1^0 r^{-4} + (4\alpha^0\Psi_0^0 - \overline{\xi}^{0\alpha}\Psi_{0,\alpha}^0) r^{-5} + o(r^{-6}), \tag{б}$$

$$\Psi_2 = \Psi_2^0 r^{-3} + (2\alpha^0\Psi_1^0 - \overline{\xi}^{0\alpha}\Psi_{1,\alpha}^0) r^{-4} + o(r^{-5}), \tag{в}$$

$$\Psi_3 = \Psi_3^0 r^{-2} - \overline{\xi}^{0\alpha}\Psi_{2,\alpha}^0 r^{-3} + o(r^{-4}), \tag{г}$$

$$\Psi_4 = \Psi_4^0 r^{-3} + (2\alpha^0\Psi_3^0 + \overline{\xi}^{0\alpha}\Psi_{3,\alpha}^0)r^{-2} + o(r^{-3}), \tag{д}$$

$$\alpha = 2, 3;$$

б) для спинорных компонент коэффициентов вращения Риччи

(8.100)

$$\rho = -r^{-1} - \sigma^0\overline{\sigma}^0 r^{-3} + o(r^{-5}), \tag{а}$$

$$\sigma = \sigma^0 r^{-2} + (\sigma^0\overline{\sigma}^0 - 0,5\Psi_0^0)r^{-4} + o(r^{-5}), \tag{б}$$

$$\alpha = \alpha^0 r^{-1} + \overline{\sigma}^0\overline{\alpha}^0 r^{-2} + \sigma^0\overline{\sigma}^0 r^{-3}\overline{\alpha}^0 + o(r^{-4}), \tag{в}$$

$$\beta = -\alpha^0 r^{-1} + \sigma^0\alpha^0 r^{-2} - (\sigma^0\overline{\sigma}^0\overline{\alpha}^0 + 0,5\Psi_1^0)r^{-3} + o(r^{-4}), \tag{г}$$

$$\tau = -0,5r^{-3}\Psi_1^0 + \frac{1}{6}r^{-4}(2\overline{\xi}^{0\alpha}\Psi_{0,\alpha}^0 - 8\alpha^0\Psi_0^0 + \sigma^0\overline{\Psi}_1^0) + o(r^{-5}), \tag{д}$$

$$\lambda = \lambda^0 r^{-1} - \overline{\sigma}^0\mu^0 r^2 + (0,5\Psi_1^0 + \sigma^0\overline{\sigma}^0\overline{\alpha}^0)r^{-3} + o(r^{-4}), \tag{е}$$

$$\mu = \mu^0 r^{-1} - (\sigma^0\lambda^0 + \Psi_2^0)r^{-2} + (\sigma^0\overline{\sigma}^0\mu^0 - \alpha^0\Psi_1^0 +$$

$$+0,5\overline{\xi}^{0\alpha}\Psi_{1,\alpha}^0)r^{-3} + o(r^{-4}), \tag{ж}$$

$$\gamma = \gamma^0 - 0,5\Psi_2^0 r^{-2} + (\frac{1}{3}\overline{\xi}_{1,\alpha}^0 - \frac{1}{6}\overline{\alpha}^0\Psi_1^0 - 0,5\alpha^0\Psi_1^0) + o(r^{-4}), \tag{з}$$

$$\nu = \nu^0 - \Psi_3^0 r^{-1} + 0,5\overline{\xi}^{0\alpha}\Psi_{2,\alpha}^0 r^{-2} + o(r^{-3}), \tag{и}$$

$$\alpha = 2, 3;$$

в) для компонент символов Ньюмена–Пенроуза

(8.101)

$$U = -(\gamma^0 + \overline{\gamma}^0)r + U^0 - 0,5(\Psi_2^0 + \overline{\Psi}_2^0)r^{-1} + \frac{1}{6}r^{-2}(\overline{\xi}^{0\alpha}\Psi_{1,\alpha}^0 +$$

$$+\xi^{0\alpha}\overline{\Psi}_{1,\alpha}^0) - 2(\alpha^0\Psi_1^0 + \overline{\alpha}_1^0) + o(r^{-4}), \tag{а}$$

$$X^\alpha = \frac{1}{6}r^{-3}(\Psi_1^0\overline{\xi}^{0\alpha} + \overline{\Psi}_1^0\xi^{0\alpha}) + o(r^{-4}), \tag{б}$$

$$\xi^\alpha = \xi^{\alpha 0}r^{-1} - \sigma^0\overline{\xi}^{0\alpha}r^{-2} + \sigma^0\overline{\sigma}^0\xi^{\alpha 0}r^{-3} + o(r^{-4}), \tag{в}$$

$$\omega = \omega^0 r^{-1} - r^{-2}(\sigma^0\overline{\omega}^0 + 0,5\Psi_1^0) + o(r^{-3}), \tag{г}$$

$$\alpha = 2, 3.$$

Для упрощения оставшихся вычислений используются следующие координатные преобразования:

$$\begin{array}{ll} r' = r + R(0,2,3) & \text{трансляция начала } r, \\ u' = u, x^{\beta'} = x^\beta, \quad \beta = 2, 3; & \end{array} \tag{8.102}$$

$$
\begin{array}{lll}
r' = r/\dot{\gamma}, \quad u' = \gamma(u), & \text{переобозначение} \\
x^{\beta'} = x^{\beta} & \text{гиперповерхностей;}
\end{array} \tag{8.103}
$$

$$
\begin{array}{ll}
r' = r, u' = u, & \text{переобозначение} \\
x^{\beta'} = x^{\beta}(0,2,3) & \text{геодезических.}
\end{array} \tag{8.104}
$$

Из уравнений (8.27а) и (8.27б) имеем

$$
g^{\alpha\beta} = -(\xi^{\alpha}\overline{\xi}^{\beta} + \overline{\xi}^{\alpha}\xi^{\beta}) = -(\xi^{0\alpha}\overline{\xi}^{0\beta} + \overline{\xi}^{0\alpha}\xi^{0\beta})r^{-2} + \ldots,
$$

$$
\alpha, \beta = 2, 3. \tag{8.105}
$$

С помощью координатных преобразований (8.102)–(8.104) метрика (8.105) может быть сведена к конформно-плоской метрике [33, 65], при этом с точностью до членов порядка $o(r^{-3})$ выполняются равенства

$$
g^{22} = g^{33}, \quad g^{23} = g^{32} = 0. \tag{8.106}
$$

Поскольку

$$
g^{22} = -2\xi^{02}\overline{\xi}^{02}r^{-2} + o(r^{-3}),
$$

$$
g^{23} = -(\xi^{02}\overline{\xi}^{03} + \overline{\xi}^{02}\xi^{03})r^{-2} + o(r^{-3}),
$$

$$
g^{33} = -2\xi^{03}\overline{\xi}^{03}r^{-2} + o(r^{-3}),
$$

то из условий (8.106) следует

$$
\xi^{02} = -i\xi^{03} = P(u, x^{\alpha}). \tag{8.107}
$$

Оставшиеся координатные преобразования для переменных $x^2$ и $x^3$ имеют вид [33]

$$
x^{2'} + ix^{3'} = f(x^2 + ix^3, u). \tag{8.108}
$$

Следующий шаг состоит в решении системы нерадиальных уравнений (8.71)–(8.72) и имеет своей целью выразить «константы» интегрирования, полученные при решении радиальных уравнений, всего лишь через две функции $\sigma^0$ и $P$.

В качестве примера рассмотрим нерадиальное уравнение (8.72в)

$$
\Delta\rho - \delta\tau = (\gamma + \overline{\gamma} - \overline{\mu})\rho - 2\alpha\tau - \lambda\sigma - \Psi_2.
$$

Учитывая определения (8.24) для спинорных производных, запишем это уравнение в виде

$$
\begin{aligned}
&\rho_{,0} + U\rho_{,1} + X^{\alpha}\rho_{,\alpha} - \overline{\omega}\tau_{,1} - \\
&\quad -\overline{\xi}^{\alpha}\tau_{,\alpha} - (\gamma + \overline{\gamma} - \overline{\mu})\rho + \\
&\qquad +2\alpha\tau + \lambda\sigma + \Psi_2 = 0.
\end{aligned} \tag{8.109}
$$

Подставляя сюда необходимые выражения из решений (8.99)–(8.101) и произведя дифференцирование по $r$, приравняем коэффициенты при разных степенях $1/r$ к нулю[1]. В результате из уравнения (8.101) получим значения коэффициентов:

1) перед $1/r$ тождественно равен нулю;

2) перед $1/r^2$ равен $(U^0 - \overline{\mu}^0)$, откуда

$$U^0 = \overline{\mu}^0;$$

3) перед $1/r^3$ имеем

$$(\sigma^0\overline{\sigma}^0)_{,0} + 2\sigma^0\overline{\sigma}^0(\gamma^0 + \overline{\gamma}^0) - (\sigma^0\lambda^0 + \overline{\sigma}^0\overline{\lambda}^0) = 0,$$

причем это соотношение определяет $\gamma^0$ и $\lambda^0$, если остальные известны;

4) перед $1/r^4$ тождественно равен нулю.

Введем обозначение

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x^2} + i\frac{\partial}{\partial x^3}, \tag{8.110}$$

тогда окончательные выражения для «констант» $\alpha^0, \gamma^0, \nu^0, \ldots$ через две основные функции $P$ и $\sigma$ примут вид:

[1]Например, если дано асимптотическое выражение $Ar^{-1} + Br^{-2} + Cr^{-3} + +o(r^{-4}) = 0$ ($A, B, C$ не зависят от $r$), то, умножая это выражение на $r$ и полагая $r \to \infty$, получим $A = 0$. Далее, умножая на $r^2$ и устремляя $r \to \infty$, получим $B = 0$ и т.д.

$$
\begin{aligned}
&\gamma^0 = -0,5(\ln \overline{P})_{,0}, && (a)\\
&\alpha^0 = 0,5\overline{P}\overline{\nabla}(\ln P)_{,0}, && (b)\\
&\nu^0 = -0,5\overline{P}\overline{\nabla}(\ln P\overline{P})_{,0}, && (c)\\
&\omega^0 = \overline{P}\left(\overline{\nabla}\sigma^0 - 2\sigma^0\overline{\nabla}(\ln P)\right), && (d)\\
&\lambda^0 = \overline{\sigma}^0\left[\ln(\sigma^0 P^{1/2}\overline{P}^{-3/2})\right]_{,0}, && (e)\\
&\mu^0 = U^0 = -0,5P\overline{P}\nabla\overline{\nabla}\ln(P\overline{P}), && (f)\\
&\Psi_2^0 - \overline{\Psi_2^0} = (\overline{P}\overline{\nabla}\omega^0 + 2\overline{\alpha}^0\overline{\omega}^0 + \overline{\sigma}^0\overline{\lambda}^0) - (P\nabla\overline{\omega}^0 + 2\alpha^0\omega^0 + \sigma^0\lambda^0), && (g)\\
&\Psi_3^0 = \overline{P}\overline{\nabla}\mu^0 - P\nabla\lambda^0 + 4\overline{\alpha}^0\overline{\lambda}^0, && (h)\\
&\Psi_4^0 = \overline{P}\overline{\nabla}\nu^0 + 2\alpha^0\nu^0 - \lambda^0_{,0} - 4\gamma^0\lambda^0. && (i)
\end{aligned}
\tag{8.111}
$$

Функции $\Psi_2^0 + \overline{\Psi_2^0}$, $\Psi_0^0$ и $\Psi_1^0$ вместе с $\sigma^0$ и $P$ являются базовыми для систем островного типа.

Распространение функций $\Psi_2^0, \Psi_0^0$ и $\Psi_1^0$ в $u$-направлении определяется группой уравнений (8.73). Например, уравнение (8.73a) с точностью до членов порядка $o(r^{-6})$ принимает вид

$$
\begin{aligned}
\Psi^0_{0,0}r^{-5} + 5(\gamma^0 + \overline{\gamma}^0)\Psi_0^0 r^{-5} -\\
-P\nabla\Psi_1^0 r^{-5} - \gamma^0\Psi_0^0 r^{-5} -\\
-2\overline{\alpha}^0\Psi_1^0 r^{-5} - 3\sigma^0\Psi_2^0 r^{-5} + o(r^{-6}) = 0,
\end{aligned}
$$

откуда

$$
\begin{aligned}
\Psi^0_{0,0} + 5(\gamma^0 + \overline{\gamma}^0)\Psi_0^0 -\\
-P\nabla\Psi_1^0 - 4\gamma^0\Psi_0^0 -\\
-2\overline{\alpha}^0\Psi_1^0 - 3\sigma^0\Psi_2^0 = 0.
\end{aligned}
\tag{8.112}
$$

Следующие два уравнения группы (8.73)–(8.73 б,в) дают

$$
\Psi^0_{1,0} + 2(\gamma^0 + 2\overline{\gamma}^0)\Psi_1^0 - P\nabla\Psi_2^0 - 2\sigma^0\Psi_3^0 = 0,
\tag{8.113}
$$

$$
\Psi^0_{2,0} + 3(\gamma^0 + \overline{\gamma}^0)\Psi_2^0 - P\nabla\Psi_3^0 - 2\overline{\alpha}^0\Psi_3^0 - 2\sigma^0\Psi_4^0 = 0.
\tag{8.114}
$$

Последнее уравнение группы (8.73) удовлетворяется тождественно. Функцию $P$ можно выбрать так, чтобы

$$
P_{,0} = 0,
$$

т.е.

$$
P = P(x^2, x^3), \quad \beta = 2,3.
\tag{8.115}
$$

При этом условии уравнения (8.111) значительно упрощаются, принимая вид

$$
\gamma^0 = 0, \quad \alpha^0 = 0,5\overline{\nabla}P, \quad \nu = 0,
$$

$$\omega^0 = P^3\overline{\nabla}(\sigma^0/P^2), \quad \lambda^0 = \overline{\sigma}^0_{,0},$$
$$\mu^0 = -P^2\nabla\overline{\nabla}\ln P; \tag{8.116}$$

$$\begin{gathered}(\Psi_2^0 - \overline{\Psi_2^0}) = \\ = P^2\left[\overline{\nabla}(\omega^0/P) - \nabla(\overline{\omega}^0/P)\right] + \\ +\overline{\sigma}^0\sigma^0_{,0} - \sigma^0\overline{\sigma}^0_{,0}, \\ \Psi_3^0 = -P\overline{\nabla}(P^2\nabla\overline{\nabla}\ln P) - \\ -P^3(\overline{\sigma}^0_{,0}/P^2), \\ \Psi_4^0 = -\overline{\sigma}^0_{,00}.\end{gathered} \tag{8.117}$$

Уравнения группы (8.73) после преобразований запишутся как

$$\begin{gathered}\Psi^0_{0,0} - \nabla(P\Psi_1^0) - 3\sigma^0\Psi_2^0 = 0, \\ \Psi^0_{1,0} - P\nabla\Psi_1^0 - 2\sigma^0\Psi_3^0 = 0, \\ \Psi^0_{2,0} - P^2\nabla(\Psi_3^0/P) - \\ -\sigma^0\overline{\sigma}^0_{,00} = 0.\end{gathered} \tag{8.118}$$

Теперь мы можем записать окончательный вид римановой метрики системы островного типа:

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ 0 & g^{12} & g^{22} & g^{23} \\ 0 & g^{13} & g^{23} & g^{33} \end{pmatrix}, \tag{8.119}$$

где

$$\begin{gathered}g^{11} = -2P^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{3^2}}\right]\ln P - (\Psi_2^0 + \overline{\Psi_2^0})r^{-1} + \\ +\frac{1}{3}P^2\left[\nabla\left\{\frac{\overline{\Psi}_1^0}{P}\right\} + \overline{\nabla}\left\{\frac{\Psi_1^0}{P}\right\} - \right. \\ \left. - 6P^4\nabla\left\{\frac{\overline{\sigma}^0}{P^2}\right\}\overline{\nabla}\left\{\frac{\sigma^0}{P^2}\right\}\right]r^{-2} + o(r^{-3}), \\ g^{12} = -r^{-2}\Re(f) + r^{-3}\Re(h) + o(r^{-4}), \\ g^{13} = -r^{-2}\Im(f) + r^{-3}\Im(h) + o(r^{-4}), \\ P = P(x^2, x^3), \\ f = 2P^4\nabla(\overline{\sigma}^0/P^2), \\ h = 4P\left[\tfrac{1}{3}\Psi_1^0 + P^3\sigma^0\nabla(\overline{\sigma}^0/P^2)\right], \\ g^{22} = -2P^2r^{-2} + 2P(\sigma^0 + \overline{\sigma}^0)r^{-3} - \\ -6\sigma^0\overline{\sigma}^0P^2r^{-4} + o(r^{-5}), \\ g^{23} = -2iP^2(\sigma^0 - \overline{\sigma}^0)r^{-3} + o(r^{-5}), \\ g^{33} = -2P^2r^{-2} - 2P(\sigma^0 + \overline{\sigma}^0)r^{-3} - \\ -6\sigma^0\overline{\sigma}^0P^2r^{-4} + o(r^{-5}).\end{gathered} \tag{8.120}$$

В матрице (8.119) компонента $g^{11}$ может быть рассчитана с точностью до членов порядка $o(r^{-4})$, а члены $g^{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 2, 3)$ с точностью до $o(r^{-5})$.

Если теперь задать начальные значения $\Psi_2^0 + \overline{\Psi_2^0}$, $\Psi_0^0$, $\Psi_1^0$, $\sigma^0$ и $P$ на бесконечности, то проблема с ними будет полностью решена.

Нулевая поверхность начальных значений $u_0$ определяется условием

$$\Psi_0^0 = \lim_{r\to\infty}(\Psi_0 r^5) < \infty.$$

Начальное значение $\sigma^0$ определено на мировой трубке на пространственной бесконечности. На этой трубке выбирается

$$\sigma^0 = \lim_{r\to\infty}(\sigma r^2)$$

как независимая функция переменных $u$, $x^2$ и $x^3$. Остальные начальные данные взяты на двумерной поверхности на бесконечности, определяемой пересечением нулевой поверхности $u_0$ и мировой трубки. На этой двумерной поверхности задаются

$$\Psi_1^0 = \lim_{r\to\infty}(\Psi_1 r^4), \quad \Psi_2^0 + \overline{\Psi_2^0} = \lim_{r\to\infty} r^3(\Psi_2 + \overline{\Psi}_2)$$

и

$$P^2\delta^{\alpha\beta} = \lim_{r\to\infty}(g^{\alpha\beta} r^2)$$

как функции $x^2$ и $x^3$.

## 8.5 Классификация решений структурных уравнений Картана геометрии $A_4$ по группам изометрий

В гл. 6 было показано, что структурные уравнения Картана геометрии $A_4$ можно рассматривать как калибровочные уравнения с калибровочными группами $T_4$ и $O(3.1)$. Знание этого факта недостаточно для того, чтобы иметь возможность отличать друг от друга различные конкретные решения структурных уравнений Картана по групповым свойствам. Это позволяет техника вложения геометрий $A_4$ в плоское пространство $E_p$ большего числа измерений $(p > 4)$.

Сделаем следующие предположения:

1) будем рассматривать пространство $A_4$ как непрерывную деформацию пространства Минковского $E_4(3.\mathrm{I})$;

2) допустим, что у $A_4$ существует минимальное плоское пространство вложения $E_p(r, s)$ размерности $p = r + s$, где сигнатура $r + s$ означает $r$ положительных и $s$ отрицательных диагональных элементов у метрического тензора $\eta_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ пространства $E_p(r, s)$.

Пусть $X^\mu$ – декартовы координаты плоского пространства $E_p(r,s)$, а $x^{\underline{\alpha}}$ – гауссовы координаты, основывающиеся на $A_4$, вложенном в $E_p(r,s)$[2].

Во вложении имеет место преобразование координат

$$X^\mu = X^\mu(x^{\underline{\alpha}}), \tag{8.121}$$

причем преобразование тензоров между двумя этими системами координат осуществляется с помощью матриц

$$\begin{aligned} x^{\underline{\alpha}}_\mu &= \frac{\partial x^{\underline{\alpha}}}{\partial X^\mu}, \quad & x^\mu_{\underline{\alpha}} &= \frac{\partial x_{\underline{\alpha}}}{\partial X_\mu}, \\ X^\mu_{\underline{\alpha}} &= \frac{\partial X^\mu}{\partial x^{\underline{\alpha}}}, \quad & X^{\underline{\alpha}}_\mu &= \frac{\partial X_\mu}{\partial x_{\underline{\alpha}}}. \end{aligned} \tag{8.122}$$

Таким образом, если $\eta_{\mu\nu}$ – декартовы компоненты метрического тензора пространства $E_p(r,s)$, то его гауссовы компоненты суть

$$g^{\underline{\alpha\beta}} = x^{\underline{\alpha}}_\mu x^{\underline{\beta}}_\nu \eta^{\mu\nu}, g_{\underline{\alpha\beta}} = X^\mu_{\underline{\alpha}} X^\nu_{\underline{\beta}} \eta_{\mu\nu}. \tag{8.123}$$

Обратные соотношения запишутся как

$$\eta^{\mu\nu} = X^\mu_{\underline{\alpha}} X^\nu_{\underline{\beta}} g^{\underline{\alpha\beta}} \eta_{\mu\nu} = x^{\underline{\alpha}}_\mu x^{\underline{\beta}}_\nu g_{\underline{\alpha\beta}}. \tag{8.124}$$

Если пространство $A_4$ имеет группу изометрий, то эта группа состоит из псевдовращений и отражений $O(r,s)$ пространства $E_p(r,s)$.

Пусть мы имеем преобразование в декартовых координатах

$$X^{\mu'} = X^\mu + U^\mu, \quad U^\mu = \varepsilon^\mu_\nu X^\nu, \tag{8.125}$$

представляющее собой одно инфинитезимальное преобразование группы $O(r,s)$, причем $p(p-1)/2$ бесконечно малых величин $e^\mu{}_\nu$ постоянны и удовлетворяют условию $e^{(\mu\nu)} = 0$. Изометрический характер преобразования (8.125) выражается в том, что производная Ли по $U^\nu$ от $\eta^{\mu\nu}$ обращается в нуль

$$\pounds\eta^{\mu\nu} = U^{(\mu,\nu)} = 0. \tag{8.126}$$

С другой стороны, гауссовы координаты преобразуются как

$$x^{\underline{\alpha}'} = x^{\underline{\alpha}} + \xi^{\underline{\alpha}}, \tag{8.127}$$

где $\xi^{\underline{\alpha}} = x^{\underline{\alpha}}_\mu U^\mu$ – генераторы группы.

Соотношение (8.127) можно разбить на две части

$$\begin{aligned} &x^{\underline{i}'} = x^{\underline{i}} + \xi^{\underline{i}}, \quad x^{\underline{A}'} = x^{\underline{A}} + \xi^{\underline{A}}, \\ &i = 1,2,3,4, \qquad A = 5\ldots p. \end{aligned} \tag{8.128}$$

[2]В этом разделе обозначенные греческими буквами индексы пробегают значения $1,\ldots,p$. Координаты точки в пространстве $A_4$ обозначим через $x^{\underline{i}}$, координаты в направлениях, ортогональных к $A_4$, как $x^{\underline{A}}$. Индексы, обозначенные латинскими буквами $i,j,k,\ldots$, пробегают значения $1,2,3,4$, а прописные $A,B,C\ldots$ – значения $5\ldots p$.

Вложенное пространство $A_4$ в гауссовой системе координат теперь определяется условием

$$x^{\underline{A}} = 0. \qquad (8.129)$$

Если $f(x^{\underline{\alpha}})$ – любая действительная функция, определенная в $E_p(r,s)$, то ее пространственно-временная часть есть

$$|f(x^{\underline{\alpha}}) = f(x^{\underline{\alpha}})|_{A_4} \quad \text{при} \quad x^{\underline{A}} \ \to 0.$$

Функцию, определенную только на вложенной поверхности $A_4$, мы будем обозначать как $f(A_4)$. Например,

$$g^{\underline{ij}}\Big|_{A_4} = x^{\underline{i}}_{\mu} x^{\underline{j}}_{\nu} \eta^{\mu\nu}\Big|_{A_4} = g^{\underline{ij}}|_{A_4}.$$

Уравнения Киллинга для вектора $\xi^{\alpha}$ имеют вид

$$\mathcal{L} g^{\underline{\alpha\beta}} = \overset{*}{\nabla}{}^{(\underline{\beta}}\xi^{\underline{\alpha})} = 0, \qquad (8.130)$$

причем

$$\overset{*}{\nabla}{}^{(\underline{j}}\xi^{\underline{i})} = 0, \quad \overset{*}{\nabla}{}^{(\underline{A}}\xi^{\underline{i})} = 0, \quad \overset{*}{\nabla}{}^{(\underline{\beta}}\xi^{\underline{A})} = 0. \qquad (8.131)$$

Координатным преобразованиям (8.128) во вложенном $A_4$ соответствуют преобразования:

$$x^{\underline{i}'} = x^{\underline{i}} + \xi^{\underline{i}}|_{A_4} = 0, \quad x^{\underline{A}'} = x^{\underline{A}} + \xi^{\underline{A}}|_{A_4} = 0, \qquad (8.132)$$

на которые налагаются условия

$$\overset{*}{\nabla}{}^{(\underline{j}}\xi^{\underline{i})}|_{A_4} = 0, \quad \overset{*}{\nabla}{}^{(\underline{A}}\xi^{\underline{i})}|_{A_4} = 0, \quad \overset{*}{\nabla}{}^{(\underline{\beta}}\xi^{\underline{A})}|_{A_4} = 0. \qquad (8.133)$$

Ковариантная производная вектора $\xi_{\underline{\alpha}}$ в гауссовой системе координат относительно связности $\Delta$ имеет вид

$$\overset{*}{\nabla}_{\beta}\, \xi_{\underline{\alpha}} = \xi_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} + \overset{\circ}{\Delta}{}^{\underline{\gamma}}_{\underline{\alpha\beta}} \xi_{\underline{\gamma}} = 0. \qquad (8.134)$$

Отсюда видно, что выражение для $\overset{*}{\nabla}_{\beta}\, \xi_{\underline{\alpha}}$ не совпадает с выражением для ковариантной производной в пространстве $A_4$, если только не выполняется условие

$$x^{\underline{A}}|_{A_4} = 0. \qquad (8.135)$$

Смысл условия (8.135) состоит в том, что преобразования (8.127) не меняют определения $A_4$. Условие (8.135) выделяет подгруппу группы $O(r,s)$, которая и определяет симметрию вложенного пространства $A_4$. Добавляя к группе $O(r,s)$ отражения и условие (8.135), мы получаем группу изометрий пространства $A_4$. Поскольку максимальная размерность пространства вложения для римановых пространств размерности 4 равна 10, то перечисление по сигнатурам пространств вложения дает возможность установить 22 изометрические группы [66].

Таблица 8.1:

| $p$ | $E_p(r,s)$ | $L_p(r,s)$ | Спинорные группы | Важнейшие подгруппы |
|---|---|---|---|---|
| 4 | $E_4(3.1)$ | $SO(3.1)$ | $SL(2.C)$ | |
| 4 | $E_4(2.2)$ | $O(3.1)$ | $SU(1.1)\times SU(1.1)$ | |
| 5 | $E_5(4.1)$ | $SO(4.1)$ | $SL(4.C)$ | $SU(2)\times SU(2)$ |
| 5 | $E_5(3.2)$ | $SO(3.2)$ | $SU(1.1.1.1)$ | $SU(1.1)\times SU(1.1)$ |
| 6 | $E_6(5.1)$ | $O(5.1)$ | $SL(4.C)$ | |
| 6 | $E_6(4.2)$ | $O(4.2)$ | $SU(2.2)$ | $SU(2)\times SU(2)$ |
| 6 | $E_6(3.3)$ | $O(3.3)$ | $SL(4.C)$ | $SU(1.1)\times SU(1.1)$ |
| 7 | $E_7(6.1)$ | $SO(6.1)$ | $SL(8.C)$ | $SU(4)$ |
| 7 | $E_7(5.2)$ | $SO(5.2)$ | $SU(2.2.2.2)$ | $SU(2.2)$ |
| 7 | $E_7(4.3)$ | $SO(4.3)$ | $SL(8.C)$ | $SU(2)\times SU(2)$ |
| 8 | $E_8(7.1)$ | $O(7.1)$ | $SL(8.C)$ | $SU(4)$ |
| 8 | $E_8(6.2)$ | $O(6.2)$ | $SU(1.1)\times SU(4.4)$ | $SU(4)$ |
| 8 | $E_8(5.3)$ | $O(5.3)$ | $SL(16.C)$ | $SU(2)\times SU(2)$ |
| 8 | $E_8(4.4)$ | $O(4.4)$ | $SU(1.1)\times SU(2.2.2.2)$ | $SU(2)\times SU(2)$ |
| 9 | $E_9(8.1)$ | $SO(8.1)$ | $SL(16.C)$ | $SU(4)$ |
| 9 | $E_9(7.2)$ | $SO(7.2)$ | $SU(4.4.4.4)$ | $SU(4.4)$ |
| 9 | $E_9(6.3)$ | $SO(6.3)$ | $SL(16.C)$ | $SU(4)$ |
| 9 | $E_9(5.4)$ | $SO(5.4)$ | $SU(2.2.2.2.2.2.2.2)$ | $SU(2)\times SU(2)$ |
| 10 | $E_{10}(9.1)$ | $O(9.1)$ | $SL(16.C)$ | |
| 10 | $E_{10}(8.2)$ | $O(8.2)$ | $SU(8.8)$ | $SU(8)$ |
| 10 | $E_{10}(7.3)$ | $O(7.3)$ | $SL(16.C)$ | |
| 10 | $E_{10}(6.4)$ | $O(6.4)$ | $SU(4.4.4.4)$ | $SU(4)$ |
| 10 | $E_{10}(5.5)$ | $O(5.5)$ | $SL(16.C)$ | |

Таблица 8.2:

| $E_{p(r.s)}$ | Метрика погруженного пространства |
|---|---|
| $E_5$ (4.1) | де Ситтера–Эйнштейна |
| $E_6$ (5.1) | Крускала |
| $E_6$ (4.2) | Шварцшильда |
| $E_7$ (5.2) | Петрова $T_2/C4/4$ [63] |
| $E_7$ (4.3) | Петрова $T_I/C4/5,6$ |
| $E_9$ (6.3) | Робинсона–Траутмана $C\le 0$ |
| $E_9$ (5.4) | Робинсона–Траутмана $C\ge 0$ |
| $E_{10}$ (6.4) | аксиально-симметричное Вейля |
| $E_{10}$ (5.5) | Геделя |

В табл. 8.1 приведены изометрические группы Ли различных конкретных пространств $A_4$, а также представлены важнейшие спинорные подгруппы. Достаточно задать одну из групп для того, чтобы изометрически определить соответствующую геометрию $A_4$. С другой стороны, каждому решению структурных уравнений Картана геометрии $A_4$ соответствует свое пространство вложения.

В табл.8.2 перечислены некоторые минимальные пространства вложения для ряда пространств $A_4$, обладающих различными римановыми метриками [66]. Все эти пространства могут быть получены как решения структурных уравнений Картана геометрии $A_4$ (например, риманова метрика пространства Геделя получена Осватом [55] с помощью метода Ньюмена–Пенроуза, т.е. как решение структурных уравнений.

## 8.6 Геометрия $A_4$ с метрикой типа метрики Шварцшильда

Чтобы сконструировать геометрию $A_4$, обладающую трансляционной метрикой Шварцшильда, необходимо выполнение условий (8.45), (8.49), (8.50), (8.55), (8.59), (8.65), (8.66) и (8.67). Физический смысл этих ограничений рассматривался ранее. В результате структурные уравнения Картана (8.69)–(8.73) принимают вид:

1) радиальные уравнения, содержащие производную по $r$

(8.136)

$$
\begin{aligned}
&D\xi^\alpha = \rho\xi^\alpha, && (a)\\
&D\omega = \rho\omega - (\overline{\alpha} + \beta), && (b)\\
&DX^\alpha = (\overline{\alpha} + \beta)\overline{\xi}^\alpha + (\alpha + \overline{\beta})\overline{\xi}^\alpha, && (c)\\
&DU = (\overline{\alpha} + \beta)\omega + (\alpha + \overline{\beta})\omega - (\gamma + \overline{\gamma}); && (d)
\end{aligned}
$$

(8.137)

$$
\begin{aligned}
&D\rho = \rho^2, && (a)\\
&0 = 0, && (b)\\
&D\tau = \tau\rho, && (c)\\
&D\alpha = \alpha\rho, && (d)\\
&D\beta = \beta\rho, && (e)\\
&D\gamma = \tau\alpha + \overline{\tau}\beta + \Psi_2, && (f)\\
&0 = 0, && (g)\\
&D\mu = \mu\rho + \Psi_2, && (h)\\
&0 = 0; && (i)
\end{aligned}
$$

(8.138)

$$
\begin{aligned}
&0 = 0, && (a)\\
&D\Psi_2 = 3\rho\Psi_2, && (b)\\
&\overline{\delta}\Psi_2 = 0, && (c)\\
&0 = 0; && (d)
\end{aligned}
$$

2) нерадиальные уравнения

$$\begin{aligned}
&\delta X^\alpha - \Delta\xi^\alpha = (\mu + \overline{\gamma} - \gamma)\xi^\alpha, && (a)\\
&\delta\overline{\xi}^\alpha - \overline{\delta}\xi^\alpha = (\overline{\beta} - \alpha)\xi^\alpha + (\overline{\alpha} - \beta)\overline{\xi}^\alpha, && (b)\\
&\delta\overline{\omega} - \overline{\delta}\omega = (\overline{\beta} - \alpha)\omega + (\overline{\alpha} - \beta)\overline{\omega} + (\mu - \overline{\mu}), && (c)\\
&\delta U - \Delta\omega = (\mu + \overline{\gamma} - \gamma)\omega; && (d)
\end{aligned} \tag{8.139}$$

$$\begin{aligned}
&0 = 0, && (a)\\
&\delta\rho = (\beta + \overline{\alpha})\rho, && (b)\\
&\delta\alpha - \overline{\delta}\beta = \mu\rho - 2\alpha\beta + \alpha\overline{\alpha} + \beta\beta - \Psi_2, && (c)\\
&\overline{\delta}\mu = -(\alpha + \overline{\beta})\mu, && (d)\\
&\Delta\mu = -\mu\gamma - \overline{\gamma}\mu - \mu^2, && (e)\\
&\delta\gamma - \Delta\beta = \tau\mu + (\mu - \gamma + \overline{\gamma})\beta, && (f)\\
&\delta\tau = 2\tau\beta, && (g)\\
&\Delta\rho - \overline{\delta}\tau = (\gamma + \overline{\gamma} - \overline{\mu})\rho - 2\alpha\tau - \Psi_2, && (h)\\
&\Delta\alpha - \overline{\delta}\gamma = (\overline{\gamma} - \gamma - \overline{\mu})\alpha; && (i)
\end{aligned} \tag{8.140}$$

3) $U$-производные уравнения

$$\begin{aligned}
&0 = 0, && (a)\\
&\delta\Psi_2 = 3\tau\Psi_2, && (b)\\
&\Delta\Psi_2 = -3\mu\Psi_2, && (c)\\
&0 = 0. && (d)
\end{aligned} \tag{8.141}$$

Поскольку в выбранной нами системе координат производные в структурных уравнениях имеют вид

$$D = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \delta = \omega\frac{\partial}{\partial r} + \xi^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta},$$

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial u} + U\frac{\partial}{\partial r} + X^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}, \quad \overline{\delta} = \overline{\omega}\frac{\partial}{\partial r} + \overline{\xi}^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta},$$

$$\beta = 2, 3,$$

а коммутационные соотношения

$$\nabla_{[a}\nabla_{b]} = -\Omega_{ab}^{\cdot\cdot c}\nabla_c \tag{8.142}$$

запишутся как

$$\begin{aligned}
\Delta D - D\Delta &= (\gamma + \overline{\gamma})D - (\overline{\tau} + \pi)\delta - (\tau + \overline{\pi})\overline{\delta}, && \text{(а)}\\
\delta D - D\delta &= (\overline{\alpha} + \beta - \overline{\pi})D - \overline{\rho}\delta, && \text{(б)}\\
\delta\Delta - \Delta\delta &= (\tau - \overline{\alpha} - \beta)\Delta + (\mu - \gamma + \overline{\gamma})\delta, && \text{(в)}\\
\overline{\delta}\delta - \delta\overline{\delta} &= (\overline{\mu} + \mu)D + (\overline{\rho} - \rho)\Delta - (\overline{\beta} - \alpha)\delta - (\overline{\alpha} - \beta)\overline{\delta}\ , && \text{(г)}
\end{aligned} \tag{8.143}$$

можно приступить к интегрированию уравнений. Интегрирование начинается с радиальных уравнений, содержащих производную $D$. Например, решение уравнения (8.137а) при условии $\rho = \overline{\rho}$ имеет вид

$$\rho = -r^{-1}. \tag{8.144}$$

Дифференцируя (8.137а) по $\overline{\delta}$, находим

$$\overline{\delta} D\rho = 2\rho\overline{\delta}\rho. \tag{8.145}$$

Применяя комплексно сопряженный оператор (8.143б) к $\rho$, получим ($\pi = 0$)

$$(\overline{\delta} D - D\overline{\delta})\rho = (\alpha + \overline{\beta})D\rho - \rho\overline{\delta}\rho, \tag{8.146}$$

откуда с учетом (8.145)

$$D\overline{\delta}\rho - 3\rho\overline{\delta}\rho = -\rho^2(\alpha + \overline{\beta}). \tag{8.147}$$

Используя уравнения (8.137а,г,д), находим общее решение (8.147)

$$\overline{\delta}\rho = \rho(\alpha + \overline{\beta}) - 2\overline{\tau}^0\rho^3, \tag{8.148}$$

где $\overline{\tau}^0$ – постоянная интегрирования. Вычисление $(\Delta D - D\Delta)\Psi$, $(\delta\Delta - \Delta\delta)\Psi$ и $(\overline{\delta}\delta - \delta\overline{\delta})\Psi$ (здесь и далее будем обозначать $\Psi_2 = \Psi,\ \Psi_2^0 = \Psi^0$) с помощью соотношений (8.138б,в), (8.141б,в) и (8.143) приводит к трем новым равенствам

$$\Delta\rho + D\mu = \rho(\gamma + \overline{\gamma}) - \tau\overline{\tau}, \tag{8.149}$$

$$\overline{\delta}\rho = \rho(\alpha + \overline{\beta}), \tag{8.150}$$

$$\delta\mu + \Delta\tau = -\mu(\overline{\alpha} + \beta) + \tau(\gamma - \overline{\gamma}). \tag{8.151}$$

Подставляя соотношение (8.148) в равенство (8.150) и производя интегрирование, получим $\overline{\tau}^0\rho^2 = 0$, откуда $\overline{\tau}^0 = \tau^0 = 0$.

Интегрируя остальные радиальные уравнения, имеем, согласно [35]

$$\begin{gathered}
\beta = \rho\beta^0, \\
\alpha = \rho\alpha^0 + \rho^2\overline{\tau}, \\
\tau = \rho\eta^0, \\
\gamma = \gamma^0 + \rho\eta^0\alpha^0 + \rho\overline{\eta}^0\beta^0 + \rho^2 1/2\Psi^0, \\
\Psi = \rho^3\Psi^0, \\
U = U^0 - r(\gamma^0 + \overline{\gamma}^0) + \rho\left\{\eta^0\overline{\omega}^0 - 1/2\Psi^0\right\} + \rho\left\{\overline{\eta}^0\omega^0 - 1/2\overline{\Psi}^0\right\}, \\
\omega = \rho\omega^0 + \overline{\alpha}^0 + \beta^0, \\
\xi^\alpha = \rho\xi^{\alpha 0}, \\
X^\alpha = X^{0\alpha} + \rho\eta^0\xi^{0\alpha} + \rho\overline{\eta}^0\overline{\xi}^{0\alpha}, \quad \alpha = 0, 2, 3.
\end{gathered} \tag{8.152}$$

Применяя оператор (8.143а) к $\rho$ и используя уравнение (8.137а), получим

$$2\rho\Delta\rho - D\Delta\rho = \rho^2(\gamma + \overline{\gamma}) - \tau\overline{\delta}\rho - \overline{\tau}\delta\rho. \qquad (8.153)$$

Решая это уравнение с помощью соотношений (8.140б), (8.148), (8.152) и учитывая, что $\tau^0 = 0$, находим

$$\begin{aligned}\Delta\rho \;\; = \;\; & -M^0\rho^2 + \eta^0(\alpha^0 + \overline{\beta}^0)\rho^2 + (\gamma^0 + \overline{\gamma}^0)\rho + \\ & + \left[\overline{\eta}^0(\overline{\alpha}^0 + \beta^0) - \eta^0\overline{\eta}^0\right]\rho^2 - 1/2\rho^3(\Psi^0 + \overline{\Psi^0}). \end{aligned} \qquad (8.154)$$

Подставляя это соотношение в равенство (8.149) и интегрируя, получим

$$\mu = \mu^0 + \rho M^0 + 1/2\rho^2(\Psi^0 + \overline{\Psi}^0). \qquad (8.155)$$

Следующий этап интегрирования состоит в подстановке полученных решений радиальных уравнений (8.144), (8.152) и (8.153) в оставшиеся неиспользованными уравнения. После дифференцирования по $r$, мы будем приравнивать к нулю коэффициенты при одинаковых степенях $1/r$. В результате возникает система уравнений для величин, не зависящих от $r$.

Применяя операторы $\delta$, $\overline{\delta}$ и $\Delta$ к $\rho = -1/r$, имеем

$$\delta\rho = \omega\rho^2, \quad \overline{\delta}\rho = \overline{\omega}\rho^2, \quad \Delta\rho = U\rho^2. \qquad (8.156)$$

Сравнивая эти равенства с (8.140б), (8.148) и (8.154), получаем

$$M^0 = \overline{M}^0, \qquad (8.157)$$

$$\omega^0 = 0, \qquad (8.158)$$

$$U^0 = \eta^0(\alpha^0 + \overline{\beta}^0) + \overline{\eta}^0(\overline{\alpha}^0 + \beta^0) - \eta^0\overline{\eta}^0 - M^0. \qquad (8.159)$$

Из уравнения (8.140в) имеем

$$\mu^0 = 0, \qquad (8.160)$$

$$\overline{\xi}^{0\alpha}\tau^0_{,\alpha} = -\tau^0(\alpha^0 + 3\overline{\beta}^0 - \eta^0) + 1/2(\Psi^0 - \overline{\Psi}^0), \qquad (8.161)$$

$$\overline{\xi}^{0\alpha}\eta^0_{,\alpha} = 2\overline{\beta}^0\eta^0. \qquad (8.162)$$

Соответственно из уравнений (8.140в,г,ж) получим

$$\begin{aligned}\xi^{0\alpha}\tau^0_{,\alpha} &= -\tau^0(3\overline{\alpha}^0 + \beta^0), \\ \xi^{0\alpha}\eta^0_{,\alpha} &= -\eta^0(2\overline{\alpha}^0 - \eta^0),\end{aligned} \qquad (8.163)$$

$$\begin{aligned}\xi^{0\alpha}\alpha^0_{,\alpha} - \overline{\xi}^{0\alpha}\beta^0_{,\alpha} &= 2\beta^0(\overline{\beta}^0 - \alpha^0) + M^0, \\ \overline{\xi}^{0\alpha}M^0_{,\alpha} &= -2M^0(\alpha^0 + \overline{\beta}^0), \\ \eta^0 &= 0.\end{aligned} \qquad (8.164)$$

Подстановка последнего из этих соотношений в равенство (8.159) дает

$$U^0 = -M^0. \qquad (8.165)$$

Из уравнений (8.140д,е,з,и) и (8.151) получаем

$$
\begin{aligned}
X^{0\alpha}\tau^0_{,\alpha} &= -\tau^0(\gamma^0 + 3\overline{\gamma}^0),\\
\xi^{0\alpha}M^0_{,\alpha} &= -2M^0(\overline{\alpha}^0 + \beta^0),\\
X^{0\alpha}\alpha^0_{,\alpha} - \overline{\xi}^{0\alpha}\gamma^0_{,\alpha} &= -\gamma^0(\alpha^0 - \overline{\beta}^0),\\
X^{0\alpha}\beta^0_{,\alpha} - \xi^{0\alpha}\gamma^0_{,\alpha} &= \gamma^0(\beta^0 + \overline{\alpha}^0) - 2\overline{\gamma}^0\beta^0,\\
X^{0\alpha}M^0_{,\alpha} &= -2M^0(\overline{\alpha}^0 + \overline{\gamma}^0).
\end{aligned}
$$

Уравнения (8.139) позволяют записать

$$\xi^{0\alpha}X^{0\beta}_{,\alpha} - X^{0\alpha}\xi^{0\beta}_{,\alpha} = 2\overline{\gamma}^0\xi^{0\beta} - (\overline{\alpha}^0 + \beta^0)X^{0\beta},$$

$$\overline{\xi}^{0\alpha}\xi^{0\beta}_{,\alpha} - \xi^{0\alpha}\overline{\xi}^{0\beta}_{,\alpha} = -2\overline{\beta}^0\xi^{0\beta} + 2\beta^0\overline{\xi}^{0\beta},$$

$$\alpha, \beta = 0, 2, 3.$$

Подставляя $\Psi = \rho^3\Psi^0$ в уравнения (8.138в) и (8.141б,в), имеем

$$\xi^{0\alpha}\Psi^0_{,\alpha} = -3\Psi^0(\overline{\alpha}^0 + \beta^0 - \eta^0), \tag{8.166}$$

$$\overline{\xi}^{0\alpha}\Psi^0_{,\alpha} = -3\Psi^0(\alpha^0 + \overline{\beta}^0), \tag{8.167}$$

$$X^{0\alpha}\Psi^0_{,\alpha} = -3\Psi^0(\gamma^0 + \overline{\gamma}^0 + \mu^0). \tag{8.168}$$

Рассмотрим случай

$$\Psi^0 = \overline{\Psi}^0, \quad \Psi^0 = \mathrm{const}, \tag{8.169}$$

тогда из уравнений (8.164) и (8.165) (с учетом (8.158) и (8.162)) следует

$$\gamma^0 + \overline{\gamma}^0 = 0, \quad \alpha^0 + \overline{\beta}^0 = 0. \tag{8.170}$$

Ограничиваясь случаем $\tau^0 = 0$, и учитывая $\eta^0 = 0$, получим $\tau = 0$, при этом уравнения (8.139) запишутся в виде

(8.171)

$$X^{0\alpha}M^0_{,\alpha} = 0, \tag{а}$$

$$\xi^{0\alpha}M^0_{,\alpha} = 0, \tag{б}$$

$$X^{0\alpha}\alpha^0_{,\alpha} - \xi^{0\alpha}\gamma^0_{,\alpha} = -2\gamma^0\alpha^0, \tag{в}$$

$$\xi^{0\alpha}\alpha^0_{,\alpha} - \overline{\xi}^{0\alpha}\beta^0_{,\alpha} = 4\alpha^0\overline{\alpha}^0 + M^0, \tag{г}$$

$$\xi^{0\alpha}X^{0\beta}_{,\alpha} - X^{0\alpha}\xi^{0\beta}_{,\alpha} = 2\overline{\gamma}^0\xi^{0\beta}, \tag{д}$$

$$\overline{\xi}^{0\alpha}\xi^{0\beta}_{,\alpha} - \xi^{0\alpha}\overline{\xi}^{0\beta}_{,\alpha} = -2\overline{\beta}^0\xi^{0\beta} + 2\beta^0\overline{\xi}^{0\beta}. \tag{е}$$

Выполнив преобразования

$$x^{\alpha} = x^{\alpha'}(x^{\alpha}),$$

добьемся того, чтобы $X^{0\alpha} = \delta^{\alpha}{}_{0}$. После этого оставшийся произвол в выборе координат состоит теперь в преобразованиях

$$\tag{8.172}$$

$$x^{0'} = x^0 + f(x^2, x^3), \tag{а}$$

$$x^{2'} = g(x^2, x^3), \tag{б}$$

$$x^{3'} = h(x^2, x^3). \tag{в}$$

Интегрирование уравнений (8.171) дает

$$\boldsymbol{M}^0 = \mathrm{const}.$$

Воспользовавшись преобразованиями

$$l^{i'} = l^i, \quad n^{i'} = n^i, \quad m^{i'} = m^i \exp[i\theta^0(x^{\alpha})], \tag{8.173}$$

можно добиться

$$\gamma^0 = 0. \tag{8.174}$$

С учетом этого обстоятельства из уравнений (8.171д) следует, что $\xi^{0\alpha}$ не зависит от $x^0$.

Введем обозначения

$$\xi^{02} = \boldsymbol{P}(x^2, x^3), \quad \xi^{03} = i\boldsymbol{P}(x^2, x^3) \tag{8.175}$$

и с помощью (8.173) сделаем $\boldsymbol{P}$ действительной функцией. После этого остается произвол, заданный преобразованием координат и компонент световой тетрады вида

$$\begin{gathered} l^{i'} = [\boldsymbol{A}^0(x^{\alpha})]^{-1} l^i, \quad n^{i'} = \boldsymbol{A}^0(x^{\alpha}) n^i, \quad m^{i'} = m^i, \\ r' = \boldsymbol{A}^0(x^{\alpha}) r \end{gathered} \tag{8.176}$$

с постоянной $\boldsymbol{A}^0$ в (8.172а), а также

$$\zeta = g(\zeta),$$

где

$$\zeta = x^2 + ix^3. \tag{8.177}$$

Используя обозначение (8.110), запишем уравнения (8.171г,е) в виде

$$\begin{gathered} \alpha^0 = 1/2\nabla P, \quad \nabla\left[\frac{\overline{\xi}^{oo}}{P}\right] = \overline{\nabla}\left[\frac{\xi^{oo}}{P}\right], \\ \varepsilon^0 = \boldsymbol{M}^0 = 2\boldsymbol{P}^2\nabla\overline{\nabla}\ln(\sqrt{2}\boldsymbol{P})\frac{1}{2}. \end{gathered} \tag{8.178}$$

Использование оставшейся свободы в выборе координат и компонент световой тетрады позволяет записать решения этих уравнений:

$$\sqrt{2}P = 1 + 1/2\varepsilon^0\zeta\overline{\zeta}, \quad \xi^{00} = 0, \quad \alpha^0 = 1/2\varepsilon^0\zeta, \\ \varepsilon^0 = \pm 1/2, 0. \tag{8.179}$$

В результате для компонент символов Ньюмена–Пенроуза имеем

$$\sigma^i_{0\dot{0}} = (0,1,0,0), \quad \sigma^i_{1\dot{1}} = (1,U,0,0), \quad \sigma^i_{0\dot{1}} = \rho(0,0,P,iP), \\ \sigma^{0\dot{0}}_i = (1,0,0,0), \quad \sigma^{1\dot{1}}_i = (-U,1,0,0), \quad \sigma^{0\dot{1}}_i = -\frac{1}{2\rho P}(0,0,1,i). \tag{8.180}$$

С помощью соотношения

$$g_{ij} = \varepsilon_{AC}\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}\sigma^{A\dot{B}}_i\sigma^{C\dot{D}}_j$$

можно теперь определить метрический тензор $g_{ik}$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} -2U & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(2\rho^2P^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2\rho^2P^2)^{-1} \end{pmatrix}, \tag{8.181}$$

где

$$U = -\varepsilon^0 + \Psi^0/r. \tag{8.182}$$

Пусть $e^0 = 1/2$, тогда удобно перейти к координатам:

$$ct = x^0 - \int dr/2U, \quad r = x^1,$$

$$\sin\theta = \frac{(\zeta\overline{\zeta})^{1/2}}{(1 + 1/4\zeta\overline{\zeta})}, \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{x^3}{x^2}. \tag{8.183}$$

В результате получается метрика Римана

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\Psi^0}{r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2\Psi^0}{r}\right)^{-1}dr^2 - \tag{8.184}$$

$$-r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

совпадающая с метрикой пространства Шварцшильда при

$$\Psi^0 = MG/c^2. \tag{8.185}$$

Обратим внимание читателя на то, что метрика (8.184) в отличие от метрики Шварцшильда теории Эйнштейна задана на группе трансляций $T_4$ геометрии абсолютного параллелизма.

При $\epsilon^0 = 0$ и $\epsilon^0 = -1/2$ получаются еще два решения, описывающие сферически-симметричные объекты с массой $M$ (не обязательно покоя), движущиеся со световой и сверхсветовой скоростями:

$$ds^2 = \left(-\frac{2\Psi^0}{r}\right)c^2dt^2 - \left(-\frac{2\Psi^0}{r}\right)^{-1}dr^2 - \tag{8.186}$$

$$-r^2(d\theta^2+\theta^2 d\varphi^2),$$

$$ds^2=\left(-1-\frac{2\Psi^0}{r}\right)c^2dt^2-\left(-1-\frac{2\Psi^0}{r}\right)^{-1}dr^2- \tag{8.187}$$

$$-r^2(d\theta^2+\operatorname{sh}^2\theta d\varphi^2).$$

Обобщив все результаты, запишем *основные характеристики геометрии $A_4$ с римановой метрикой типа метрики Шварцшильда.*

$$\tag{8.188}$$

1. Координаты: $u$, $r$, $x^2$ и $x^3$ определяются согласно (8.19).
2. Компоненты символов Ньюмена–Пенроуза:

$$\sigma^i_{0\dot{0}}=(0,1,0,0),\quad \sigma^i_{1\dot{1}}=(1,U,0,0),\quad \sigma^i_{0\dot{1}}=\rho(0,0,P,iP),$$

$$\sigma^{0\dot{0}}_i=(1,0,0,0),\quad \sigma^{1\dot{1}}_i=(-U,1,0,0),\quad \sigma^{0\dot{1}}_i=-\frac{1}{2\rho P}(0,0,1,i),$$

$$U=-1/2+\Psi^0/r,\quad P=(2)^{-1/2}(1+\zeta\overline{\zeta}/4),\quad \zeta=x^2+ix^3,$$

$$\Psi^0=\text{const}.$$

3. Спинорные компоненты коэффициентов вращения Риччи:

$$\rho=-1/r,\quad \alpha=-\overline{\beta}=-\alpha^0/r,\quad \gamma=\Psi^0/2r,$$

$$\mu=-\varepsilon^0/r+2\Psi^0/r^2, \alpha=\zeta/4.$$

4. Спинорные компоненты тензора Римана:

$$\Psi=-\Psi^0/r^3.$$

Подставляя компоненты коэффициентов вращения Риччи решения (8.190) во вращательную метрику Киллинга–Картана, находим

$$d\tau^2=-\frac{(\Psi^0)^2}{2r^4}dx_0^2-\frac{2(\Psi^0-r)}{r}d\theta^2-$$
$$-\frac{2(\Psi^0-r)\sin^2\theta}{r}d\varphi^2. \tag{8.189}$$

## 8.7 Некоторые физически значимые решения структурных уравнений Картана геометрии $A_4$

Опуская подробные вычисления, приведем ряд точных решений структурных уравнений Картана геометрии $A_4$, которые получают физическую интерпретацию в теории физического вакуума [67-73].

### 8.7.1 Решение с переменной функцией источника

$$(8.190)$$

1. Координаты: $x^0 = u,\ x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi$.
2. Компоненты символов Ньюмена–Пенроуза:

$$\sigma^i_{0\dot{0}} = (0,1,0,0), \quad \sigma^i_{1\dot{1}} = (1,U,0,0), \quad \sigma^i_{0\dot{1}} = \rho(0,0,P,iP),$$

$$\sigma_i^{0\dot{0}} = (1,0,0,0), \quad \sigma_i^{1\dot{1}} = (-U,1,0,0), \quad \sigma_i^{0\dot{1}} = -\frac{1}{2\rho P}(0,0,1,i),$$

$$U(u) = -1/2 + \Psi^0(u)/r, \quad P = (2)^{-1/2}(1+\zeta\overline{\zeta}/4), \quad \zeta = x^2 + ix^3,$$

$$\Psi^0 = \Psi^0(u).$$

3. Спинорные компоненты коэффициетов вращения Риччи:

$$\rho = -1/r, \quad \alpha = -\overline{\beta} = -\alpha^0/r, \quad \gamma = \Psi^0(u)/2r^2,$$

$$\mu = -1/2r + \Psi^0(u)/r^2, \quad \alpha^0 = \zeta/4.$$

4. Спинорные компоненты тензора Римана:

$$\Psi_2 = \Psi = -\Psi^0(u)/r^3, \quad \Phi_{22} = \Phi = -\dot{\Psi}^0(u)/r^2 = -\frac{\partial\Psi^0}{\partial u}\frac{1}{r^2}.$$

Метрика Римана решения (8.190) в координатах (8.183) имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\Psi^0(t)}{r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2\Psi^0(t)}{r}\right)^{-1}dr^2 - -r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (8.191)$$

### 8.7.2 Решение с кварковым взаимодействием

$$(8.192)$$

1. Координаты: $x^0 = u,\ x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi$.
2. Компоненты символов Ньюмена–Пенроуза:

$$\sigma^i_{0\dot{0}} = (0,1,0,0), \quad \sigma^i_{1\dot{1}} = (1,U,0,0), \quad \sigma^i_{0\dot{1}} = \rho(0,0,P,iP),$$

$$\sigma_i^{0\dot{0}} = (1,0,0,0), \quad \sigma_i^{1\dot{1}} = (-U,1,0,0), \quad \sigma_i^{0\dot{1}} = -\frac{1}{2\rho P}(0,0,1,i),$$

$$U = -1/2 + \tilde{\Lambda}r^2, \quad P = (2)^{-1/2}(1+\zeta\overline{\zeta}/4), \quad \zeta = x^2 + ix^3,$$

$$\tilde{\Lambda} = \mathrm{const}.$$

3. Спинорные компоненты коэффициентов вращения Риччи:

$$\rho = -1/r, \quad \alpha = -\overline{\beta} = -\alpha^0/r, \quad \gamma = \tilde{\Lambda} r,$$

$$\mu = -1/2r - \tilde{\Lambda}\rho r^2, \quad \alpha^0 = \zeta/4.$$

4. Спинорные компоненты тензора Римана:

$$\Lambda = \tilde{\Lambda}/6 = R/24 = \mathrm{const}.$$

Метрика Римана решения (8.192) в координатах (8.183) имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \Lambda r^2/3\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \Lambda r^2/3\right)^{-1} dr^2 - \\ -r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (8.193)$$

### 8.7.3 Решение с короткодействующим (ядерным) взаимодействием

(8.194)

1. Координаты: $x^0 = u,\ x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi$.
2. Компоненты символов Ньюмена–Пенроуза:

$$\sigma^i_{0\dot{0}} = (0,1,0,0), \quad \sigma^i_{1\dot{1}} = (1,U,0,0),$$

$$\sigma^i_{0\dot{1}} = \overline{\rho}(-ir_N\zeta/\sqrt{2},0,P,iP), \quad \sigma^i_{1\dot{0}} = \overline{\sigma^i_{0\dot{1}}}$$

$$\sigma_i^{0\dot{0}} = (1, 0 - r_N x^3/\sqrt{2}\,P,\ r_N x^2/\sqrt{2}P),$$

$$\sigma_i^{1\dot{1}} = (-U, 1, U r_N x^3/\sqrt{2}\,P, -U r_N x^2/\sqrt{2}P),$$

$$\sigma_i^{0\dot{1}} = -\frac{1}{2\rho P}(0,0,1,i), \quad \sigma_i^{1\dot{0}} = \overline{\sigma_i^{0\dot{1}}},$$

$$U = -\frac{1}{2} + \rho\overline{\rho}r_N^2, \quad P = (2)^{-1/2}(1 + \zeta\overline{\zeta}/4), \quad \zeta = x^2 + ix^3,$$

$$r_N = \mathrm{const}.$$

3. Спинорные компоненты коэффициентов вращения Риччи:

$$\rho = -(r + ir_N)^{-1}, \quad \alpha = \rho\alpha^0, \quad \beta = -\overline{\alpha}, \quad \alpha^0 = \zeta/4,$$

$$\gamma = \rho^2\Psi^0/2, \quad \mu = \rho/2 + \rho^2\Psi^0/2 + \rho\overline{\rho}\overline{\Psi}^0/2, \quad \Psi^0 = ir_N.$$

4. Спинорные компоненты тензора Римана:

$$\Psi_2 = \Psi = \Psi^0\rho^3.$$

Метрика Римана решения (8.194) в координатах (8.183) имеет вид

$$ds^2 = \Phi[cdt + 4r_N \sin^2(\theta/2)d\varphi]^2 + dr^2/\Phi - \\ -(r^2 + r_N^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi), \tag{8.195}$$

где

$$\Phi = 1 - \frac{2r_N^2}{r^2 + r_N^2}. \tag{8.196}$$

### 8.7.4 Решение с электроядерным взаимодействием

$$\tag{8.197}$$

1. Координаты: $x^0 = u,\ x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi$.
2. Компоненты символов Ньюмена–Пенроуза:

$$\sigma^i_{0\dot{0}} = (0, 1, 0, 0), \quad \sigma^i_{1\dot{1}} = (1, U, 0, 0),$$

$$\sigma^i_{0\dot{1}} = \overline{\rho}(-ir_N\zeta/\sqrt{2}, 0, P, iP), \quad \sigma^i_{1\dot{0}} = \overline{\sigma^i_{0\dot{1}}},$$

$$\sigma_i^{0\dot{0}} = (1, 0 - r_N x^3/\sqrt{2}\,P,\ r_N x^2/\sqrt{2}P),$$

$$\sigma_i^{1\dot{1}} = (-U, 1, Ur_N x^3/\sqrt{2}\,P, -Ur_N x^2/\sqrt{2}P),$$

$$\sigma_i^{0\dot{1}} = -\frac{1}{2\rho P}(0, 0, 1, i), \quad \sigma_i^{1\dot{0}} = \overline{\sigma_i^{0\dot{1}}},$$

$$U = -\frac{1}{2} + \rho\overline{\rho}(rr_e/2 + r_N^2), \quad P = (2)^{-1/2}(1 + \overline{\zeta}\zeta/4),$$

$$\zeta = x^2 + ix^3, \quad r_N = \mathrm{const}, r_e = \mathrm{const}.$$

3. Спинорные компоненты коэффициентов вращения Риччи:

$$\rho = -(r + ir_N)^{-1}, \quad \alpha = \rho\alpha^0, \quad \beta = -\overline{\alpha}, \quad \alpha^0 = \zeta/4,$$

$$\gamma = \rho^2\Psi^0/2, \quad \mu = \rho/2 + \rho^2\Psi^0/2 + \rho\overline{\rho}\overline{\Psi}^0/2, \quad \Psi^0 = r_e/2 + ir_N.$$

4. Спинорные компоненты тензора Римана:

$$\Psi_2 = \Psi = \Psi^0\rho^3.$$

Метрика Римана решения (8.197) в координатах (8.183) имеет вид

$$ds^2 = \Phi[cdt + 4r_N \sin^2(\theta/2)d\varphi]^2 + dr^2/\Phi - \\ -(r^2 + r_N^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi), \tag{8.198}$$

где

$$\Phi = 1 - \frac{rr_e + 2r_N^2}{r^2 + r_N^2}. \tag{8.199}$$

### 8.7.5 Решение с электроядерно-кварковым взаимодействием

$$(8.200)$$

1. Координаты: $x^0 = u,\ x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi$.
2. Компоненты символов Ньюмена–Пенроуза:

$$\sigma^i_{0\dot 0} = (0,1,0,0), \quad \sigma^i_{1\dot 1} = (1,U,0,0),$$

$$\sigma^i_{0\dot 1} = \overline{\rho}(-ir_N\zeta/\sqrt{2},0,P,iP), \quad \sigma^i_{1\dot 0} = \overline{\sigma^i_{0\dot 1}},$$

$$\sigma_i^{0\dot 0} = (1,0 - r_N x^3/\sqrt{2}\ P,\ r_N x^2/\sqrt{2}P),$$

$$\sigma_i^{1\dot 1} = (-U,1,Ur_N x^3/\sqrt{2}\ P,-Ur_N x^2/\sqrt{2}P),$$

$$\sigma_i^{0\dot 1} = -\frac{1}{2\rho P}(0,0,1,i), \quad \sigma_i^{1\dot 0} = \overline{\sigma_i^{0\dot 1}},$$

$$U = -\frac{1}{2} + \rho\overline{\rho}(r_e r/2 + r_N^2 - 8\tilde\Lambda r_N^4) + \tilde\Lambda(r^2 + 5r_N^2),$$

$$\zeta = x^2 + ix^3, \quad P = (2)^{-1/2}(1 + \zeta\overline{\zeta}/4),$$

$$r_N = \mathrm{const}, r_e = \mathrm{const}, \tilde\Lambda = \mathrm{const}.$$

3. Спинорные компоненты коэффициентов вращения Риччи:

$$\rho = -(r + ir_N)^{-1}, \quad \alpha = \rho\alpha^0, \quad \beta = -\overline{\alpha}, \quad \alpha^0 = \zeta/4,$$

$$\gamma = \gamma^0 + \rho^2\Psi^0/2 - \tilde\Lambda r, \quad \mu = \rho/2 + \rho^2\Psi^0/2 + \rho\overline{\rho}\overline{\Psi}^0/2 - \tilde\Lambda r^2\rho,$$

$$\Psi^0 = r_e/2 + ir_N = \mathrm{const}, \gamma^0 = -i\tilde\Lambda r_N.$$

4. Спинорные компоненты тензора Римана:

$$\Psi_2 = \Psi = \Psi^0\rho^3, \quad \Lambda = \tilde\Lambda/6 = R/24 = \mathrm{const}.$$

Метрика Римана решения (8.200) в координатах (8.183) имеет вид

$$ds^2 = \Phi[cdt + 4r_N\sin^2(\theta/2)d\varphi]^2 + dr^2/\Phi - \\ -(r^2 + r_N^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi), \tag{8.201}$$

где

$$\Phi = 1 - \frac{rr_e + 2r_N^2 - 16\tilde\Lambda r_N^4}{r^2 + r_N^2} - 2\tilde\Lambda(r^2 + 5r_N^2). \tag{8.202}$$

### 8.7.6 Решение с кулон-ньютоновским взаимодействием и трехмерным вращением источника

$$(8.203)$$

1. Координаты: $x^0 = u,\ x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi$.
2. Компоненты символов Ньюмена–Пенроуза:

$$\sigma^{i}_{0\dot{0}} = (0,1,0,0), \quad \sigma^{i}_{1\dot{1}} = \rho\overline{\rho}(\Omega, -Y, 0, a),$$

$$\sigma^{i}_{0\dot{1}} = -\frac{\overline{\rho}}{\sqrt{2}}(ia\sin\theta, 0, 1, i \operatorname{cosec}\theta), \quad \sigma^{i}_{1\dot{0}} = \overline{\sigma^{i}_{0\dot{1}}},$$

$$\sigma_{i}^{0\dot{0}} = (1,0,0,-a\sin^2\theta),$$

$$\sigma_{i}^{1\dot{1}} = \rho\overline{\rho}\left(Y, (\rho\overline{\rho})^{-1}, 0, -a\sin^2\theta Y\right),$$

$$\sigma_{i}^{0\dot{1}} = -\frac{\overline{\rho}}{\sqrt{2}}\left(ia\sin\theta, 0, -(\rho\overline{\rho})^{-1}, -i\Omega\sin\theta\right), \quad \sigma_{i}^{1\dot{0}} = \overline{\sigma_{i}^{0\dot{1}}},$$

$$\Omega = r^2 + a^2, \quad Y = (r^2 + a^2 - 2\Psi^0 r)/2,$$

$$a = \text{const}, \quad \Psi^0 = r_e/2 = \text{const}.$$

3. Спинорные компоненты коэффициентов вращения Риччи:

$$\rho = -(r - ia\cos\theta)^{-1}, \beta = -\text{ctg}\ \theta\overline{\rho}/(2)^{3/2},$$

$$\pi = ia\sin\theta\rho^2/(2)^{1/2}, \quad \alpha = \pi - \overline{\beta}, \quad \mu = Y\rho^2\overline{\rho},$$

$$\gamma = \mu + (r + \Psi^0)\rho\overline{\rho}/2, \quad \tau = ia\sin\theta\rho\overline{\rho}/(2)^{1/2}.$$

4. Спинорные компоненты тензора Римана:

$$\Psi_2 = \Psi = \Psi^0\rho^3.$$

Метрика Римана решения (8.203) в координатах (8.183) имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left(1 - \frac{2\Psi^0 r}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)c^2dt^2 + \frac{4\Psi^0 ra}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\sin^2\theta d\varphi cdt - \\ &- \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 - 2\Psi^0 r + a^2}dr^2 - (r^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 - \\ &- \left(r^2 + a^2 + \frac{2\Psi^0 ra^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta d\varphi^2. \end{aligned} \tag{8.204}$$

### 8.7.7 Чисто торсионное решение

$$\tag{8.205}$$

1. Координаты: $x^0 = u,\ x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi$.
2. Компоненты символов Ньюмена–Пенроуза:

$$\sigma^{i}_{0\dot{0}} = (0,1,0,0), \quad \sigma^{i}_{1\dot{1}} = \rho\overline{\rho}(\Omega, -Y, 0, a),$$

$$\sigma^{i}_{0\dot{1}} = -\frac{\overline{\rho}}{\sqrt{2}}(ia\sin\theta, 0, 1, i \operatorname{cosec}\theta), \quad \sigma^{i}_{1\dot{0}} = \overline{\sigma^{i}_{0\dot{1}}},$$

$$\sigma_i^{0\dot{0}} = (1, 0, 0, -a\sin^2\theta),$$

$$\sigma_i^{1\dot{1}} = \rho\overline{\rho}\left(Y, (\rho\overline{\rho})^{-1}, 0, -a\sin^2\theta Y\right),$$

$$\sigma_i^{0\dot{1}} = -\frac{\overline{\rho}}{\sqrt{2}}\left(ia\sin\theta, 0, -(\rho\overline{\rho})^{-1}, -i\Omega\sin\theta\right), \quad \sigma_i^{1\dot{0}} = \overline{\sigma_i^{0\dot{1}}},$$

$$\Omega = r^2 + a^2, \quad Y = (r^2 + a^2)/2,$$

$$a = \mathrm{const}.$$

3. Спинорные компоненты коэффициентов вращения Риччи:

$$\rho = -(r - ia\cos\theta)^{-1}, \quad \beta = -\mathrm{ctg}\ \theta\overline{\rho}/(2)^{3/2},$$

$$\pi = ia\sin\theta\rho^2/(2)^{1/2}, \quad \alpha = \pi - \overline{\beta}, \quad \mu = Y\rho^2\overline{\rho},$$

$$\gamma = \mu + r\rho\overline{\rho}/2, \quad \tau = ia\sin\theta\rho\overline{\rho}/(2)^{1/2}.$$

Метрика Римана решения (8.205) в координатах (8.183) имеет вид

$$ds^2 = c^2dt^2 - \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 + a^2}dr - (r^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 - \\ -(r^2 + a^2)\sin^2\theta d\varphi^2. \qquad (8.206)$$

### 8.7.8 Решение с переменным кулон-ньютоновским взаимодействием и трехмерным вращением источника

(8.207)

1. Координаты: $x^0 = u,\ x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi$.
2. Компоненты символов Ньюмена–Пенроуза:

$$\sigma^i_{0\dot{0}} = (0, 1, 0, 0), \quad \sigma^i_{1\dot{1}} = \rho\overline{\rho}(\Omega, -Y, 0, a),$$

$$\sigma^i_{0\dot{1}} = -\frac{\overline{\rho}}{\sqrt{2}}(ia\sin\theta, 0, 1, i\ \mathrm{cosec}\ \theta), \quad \sigma^i_{1\dot{0}} = \overline{\sigma^i_{0\dot{1}}},$$

$$\sigma_i^{0\dot{0}} = (1, 0, 0, -a\sin^2\theta),$$

$$\sigma_i^{1\dot{1}} = \rho\overline{\rho}\left(Y, (\rho\overline{\rho})^{-1}, 0, -a\sin^2\theta Y\right),$$

$$\sigma_i^{0\dot{1}} = -\frac{\overline{\rho}}{\sqrt{2}}\left(ia\sin\theta, 0, -(\rho\overline{\rho})^{-1}, -i\Omega\sin\theta\right), \quad \sigma_i^{1\dot{0}} = \overline{\sigma_i^{0\dot{1}}},$$

$$\Omega = r^2 + a^2, \quad Y = (r^2 + a^2 - 2\Psi^0 r)/2,$$

$$a = \mathrm{const}, \quad \Psi^0 = \Psi^0(u).$$

3. Спинорные компоненты коэффициентов вращения Риччи:

$$\rho = -(r - ia\cos\theta)^{-1}, \quad \beta = -\mathrm{ctg}\ \theta\overline{\rho}/(2)^{3/2},$$

$$\pi = ia\sin\theta\rho^2/(2)^{1/2}, \quad \alpha = \pi - \overline{\beta}, \quad \mu = Y\rho^2\overline{\rho},$$

$$\gamma = \mu + (r + \Psi^0(u))\rho\overline{\rho}/2, \quad \tau = ia\sin\theta\rho\overline{\rho}/(2)^{1/2},$$

$$\nu = \frac{-i\dot{\Psi}^0(u)ra\sin\theta\rho^2\overline{\rho}}{2^{1/2}}.$$

4. Спинорные компоненты тензора Римана:

$$\begin{aligned} \Psi_2 = \Psi = \Psi^0(u)\rho^3, \\ \Psi_2 = -i\dot{\Psi}^0(u)a\sin\theta\rho^2\overline{\rho}/(2)^{3/2} - 2i\dot{\Psi}^0(u)ra\sin\theta\rho^3\overline{\rho}/(2)^{1/2}, \\ \Psi_4 = \ddot{\Psi}^0(u)ra^2\sin^2\theta\rho^3\overline{\rho}/2 + \dot{\Psi}^0(u)ra^2\sin^2\theta\rho^4\overline{\rho}, \\ \Psi_{12} = -i\dot{\Psi}^0(u)a\sin\theta\rho^2\overline{\rho}/(2)^{3/2}, \\ \Psi_{22} = -\ddot{\Psi}^0(u)ra^2\sin^2\theta\rho^2\overline{\rho}^2/2 - \dot{\Psi}^0(u)r^2\rho^2\overline{\rho}^2. \end{aligned}$$

Метрика Римана решения (8.207) в координатах (8.183) имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 = \left(1 - \frac{2\Psi^0(t)r}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)c^2dt^2 + \frac{4\Psi^0(t)ra}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\sin^2\theta d\varphi c dt - \\ -\frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 - 2\Psi^0(t)r + a^2}dr^2 - (r^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 - \\ -\left(r^2 + a^2 + \frac{2\Psi^0(t)ra^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta d\varphi^2. \end{aligned} \tag{8.208}$$

### 8.7.9 Решение с электроядерным взаимодействием и трехмерным вращением источника

$$\tag{8.209}$$

1. Координаты: $x^0 = u,\ x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi$.
2. Компоненты символов Ньюмена–Пенроуза:

$$\sigma^i_{0\dot{0}} = (0,1,0,0), \quad \sigma^i_{1\dot{1}} = \rho\overline{\rho}(\Sigma, -\Pi, 0, a),$$

$$\sigma^i_{0\dot{1}} = -\frac{\overline{\rho}}{\sqrt{2}}(ia\sin\theta + 2ir_N\ \mathrm{ctg}\ \theta, 0, 1, i\ \mathrm{cosec}\ \theta), \quad \sigma^i_{1\dot{0}} = \overline{\sigma^i_{0\dot{1}}},$$

$$\Sigma = r^2 + r_N^2 + a^2, \quad \Pi = (r^2 - r_N^2 + a^2 - r_e r)/2,$$

$$r_N = \mathrm{const}, \quad a = \mathrm{const}, \quad r_e = \mathrm{const}.$$

3. Спинорные компоненты коэффициентов вращения Риччи:

$$\rho = -(r + ir_N - ia\cos\theta)^{-1}, \quad \beta = \overline{\rho}\beta^0, \quad \pi = \rho^2\overline{\tau}^0,$$

$$\alpha = \rho\alpha^0 + \rho^2\overline{\tau}^0, \quad \tau = \rho\overline{\rho}\tau^0,$$

$$\mu = \rho/2 + \rho\Psi^0/2 + \rho\overline{\rho}\overline{\Psi}^0/2 + \rho^2\overline{\rho}\tau^0\overline{\tau},$$

$$\gamma = \rho^2\Psi^0 + \rho\overline{\rho}(\tau^0\alpha^0 + \overline{\tau}^0\beta^0) + \rho^2\overline{\rho}\tau^0\overline{\tau}^0,$$

$$\Psi^0 = r_e/2 + ir_N,$$

$$\overline{\alpha}^0 = -\beta^0, \quad \beta^0 = -\frac{1}{4}(2)^{1/2}\mathrm{ctg}\,\theta, \quad \tau^0 = -\frac{1}{2}ia(2)^{1/2}\sin\theta.$$

4. Спинорные компоненты тензора Римана:

$$\Psi_2 = \Psi = \Psi^0\rho^3.$$

Отличные от нуля компоненты метрического тензора $g_{ij}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
g_{uu} &= \rho\overline{\rho}(r^2 r - r_N^2 + a^2\cos^2\theta),\\
g_{ur} &= 1,\\
g_{u\varphi} &= -2\rho\overline{\rho}r_N\cos\theta\Pi + 2\rho\overline{\rho}a\sin^2\theta(r_e r/2 + r_N^2),\\
g_{r\varphi} &= -a\sin^2\theta - 2r_N\cos\theta,\\
g_{\theta\theta} &= -r^2 - (r_N - a\cos\theta)^2,\\
g_{\varphi\varphi} &= \rho\overline{\rho}\Pi(a\sin^2\theta + 2r_N\cos\theta)^2 - \rho\overline{\rho}\sin^2\theta\Sigma^2.
\end{aligned} \tag{8.210}$$

# Литература


[1] *Weitzenbock R.* Invariantentheorie. Groningen: Noordhoff, 1923. 320 S.

[2] *Weitzenbock R.* // Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl. 1924. Bd. S. 466-501.

[3] *Vitali G.* // Atti Soc. ligust. sci. Lett. 1924. Vol. 11. P.248-254.

[4] *Vitali G.* // Ibid. 1925. Vol. 14. P. 287-291.

[5] *Weitzenbock R.* // Proc. Knkl. nederl. akad. 1926. Vol. 28. P. 400-411.

[6] *Levi-Civita R.* et. al. // Math. Ann. 1900. Vol. 54. P. 125-130.

[7] *Schouten J.* Ricci-Calculus. B.; Heidelberg: Springer, 1954.

[8] *Синцов Д.М.* Работы по неголономной геометрии. Киев: Вища шк., 1972.

[9] *Cartan E., Schouten J.* // Proc. Knkl. nederl. akad. 1926. Vol. 29. P. 803-810.

[10] *Cartan E., Schouten J.* // Ibid. P. 933-938.

[11] *Bortolotti E.* // Atti Veneto. 1927. Vol. 2. P. 455-462.

[12] *Bortolotti E.* // Proc. Knkl. nederl. akad. 1927. Vol. 30. P. 216-311.

[13] *Bortolotti E.* // Mem. acad. Bologna. 1927. Vol. 30. P. 45-54.

[14] *Bortolotti E.* // Rend. Lincei. 1929. Vol. 9. P. 530.

[15] *Griss G.* Differatianarianten von Systemen von Vektoren: Diss. Groningen, 1925. 61 S.

[16] *Schouten J.* Vorlensugen über die Theorie der Halbeinfachen Gruppen. Leiden, 1927. 285 S.

[17] *Schouten J.* // Math. Ann. 1929. Vol. 102. P. 244-248.

[18] *Eisenhart L.* Riemannian geometry. Princeton (N.J.): Univ. press, 1960.

[19] *Cartan E.* // Math. Ann. 1930. Vol. 102. P. 698-701.

[20] *Thomas T.* // Composito math. 1937. Vol. 3. P. 453-463.

[21] *Mayer W., Thomas T.* // Ibid. Vol. 5. P. 198-205.

[22] *Haimovici A.* // Ann. Sci. Univ. Jasay. 1943. Vol. 29. P. 90-96.

[23] *D'Atri J., Nickerson N.* // J. Differ. Geometry. 1968. Vol. 2. P. 393-451.

[24] *Wolf J.* // Ibid. 1972. Vol. 6. P. 317.

[25] *Wolf J.* // Ibid. Vol. 7. P. 19-26.

[26] *Einstein A.* // Sitzunsber. preuss. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl. 1928. Bd. S. 217.

[27] *Einstein A.* // Ibid. S. 224.

[28] *Шипов Г.И.* Математические основы калибровочной модели физического вакуума. М., 1987. Деп. в ВИНИТИ, N 5326-В87.

[29] *Пенроуз Р.* Структура пространства–времени. М.: Мир, 1972.

[30] *Newmen E., Penrose R.* // J. Math. Phys. 1962. Vol. 3, №3. P. 566-587.

[31] *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство–время. Т. 1. М.: Мир, 1987.

[32] *Vaidya P.* // Tensor. 1972. Vol. 24. P. 1.

[33] *Newman E., Tamburino L., Unti T.* // J.Math. Phys. 1963. Vol. 4, №7. P. 915-923.

[34] *Debney G., Kerr R., Schield A.* // Ibid. 1969. Vol. 10. №10, P. 1842.

[35] *Фролов В.П.* // ТМФ. 1974. Т. 21, №2. С. 213-223.

[36] *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964.

[37] *Схоутен Я.* Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. 81 с.

[38] *Фавар Ж.* Курс локальной дифференциальной геометрии. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

[39] *Hayashi K.* // Phys. Lett. B. 1977. Vol. 69, №4. P. 441-443.

[40] *Шипов Г.И.* Геометрия абсолютного параллелизма. Ч. 1. М., 1992. Препр. 62 с. МНТЦ ВЕНТ; №14.

[41] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1958.

[42] *Hsin-Yang Yeh.* // J. Math. Phys. 1974. Vol. 15, №7. P. 1085-1095.

[43] *Shipov G., Skalsky V.* // Proc. of the Intern. conf. on differential geometry and its applications. Brno, 1989.

[44] *Шипов Г.И.* Программа всеобщей относительности и теория вакуума. М., 1988. Деп. в ВИНИТИ, №6947-В88.

[45] *Infeld L., B. der Werden* // Akad. Wiss. Phys.-math. Kl. 1933. Bd. S. 380-395.

[46] *Pirani F.* Lec. on gen. Relativity. 1964, Vol. 1.

[47] *Witten L.* // Phys. Rev. 1959. Vol. 113. P. 357-362.

[48] *Corson E.* An introduction to tensors, spinors and relativistic wave equations. L.: Blakie, 1953.

[49] *Carmeli M.* // J. Math. Phys. 1970. Vol. 2. P. 27-28.

[50] *Carmeli M.* // Lett. nuovo cim. 1970. Vol. 4. P. 40-46.

[51] *Carmeli M.* // Phys. Rev. D. 1972. Vol. 5. P. 5-8.

[52] *Шипов Г.И.* Геометрия абсолютного параллелизма. Ч.2. М., 1992. 67 с. Препр. МНТЦ ВЕНТ; №15.

[53] *Фролов В.* // Тр. ФИАН. 1977. Т. 96. С. 72-180.

[54] *Herrera L.* // Lett. nuovo cim. 1978. Vol. 21. P. 11-14.

[55] *Ozsvath J.* // J. Math. Phys. 1964. Vol. 6, №4. P. 590-611.

[56] *Carmeli M., Malin S.* // Ann. Phys. 1977. Vol. 103. P. 208-232.

[57] *Carmeli M.* // Phys. Rev. D. 1976. Vol. 14, №6. P. 1727-1728.

[58] *Geroch R., Held A., Penrose R.* // J. Math. Phys. 1973. Vol. 14. P. 874.

[59] *Шипов Г.И.* Геометрия абсолютного параллелизма. Ч.3. М., 1992. 76 с. Препр. МНТЦ ВЕНТ; №16.

[60] *Newman E., Unti T.* // J. Math. Phys. 1962. Vol. 3, №3. P. 891-901.

[61] *Robinson J., Trautman A.* // Phys. Rev. Lett. 1960. Vol. 4. P. 431.

[62] *Петров А.З.* // Учен. зап. Казан. ун-та. 1954. Т. 114. С. 55.

[63] *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.

[64] *Goldber J., Sachs R.* // Acta phys. pol. Suppl. 1962. Vol. 22. P.13-18.

[65] *Newman E., Penrose R.* // Ibid. 1963. Vol. 4, №7. P. 998-1005.

[66] *Maia D.* // Ibid. 1973. Vol. 14. №7. P. 882-887.

[67] *Губарев Е.А., Сидоров А.Н.* // Гравитация и фундаментальные взаимодействия, М.: Изд-во Ун-та дружбы народов, 1988. С. 92.

[68] *Губарев Е.А., Сидоров А.Н., Шипов Г.И.* // Актуальные проблемы фундаментальных наук. М.: Изд-во МГТУ, 1991. Т. 3. С. 102–105.

[69] *Губарев Е.А., Сидоров А.Н., Шипов Г.И.* Фундаментальные модели элементарных взаимодействий и теория физического вакуума. М., 1992. 68 с. Препринт МНТЦ ВЕНТ; №17.

[70] *Губарев Е.А., Сидоров А.Н., Шипов Г.И.* // Тр. V семинара «Гравитационная энергия и гравитационные волны». Дубна. 1993. С. 232–238.

[71] *Шипов Г.И.*// Тр. VI семинара «Гравитационная энергия и гравитационные волны». Дубна. 1994. С. 141–145.

[72] *Губарев Е.А., Сидоров А.Н.* // Там же. С. 146–152.

[73] *Шипов Г.И.*// Преодоление кулоновского барьера за счет торсионных эффектов. М., 1995. 12 с. Препринт МНТЦ ВЕНТ; №61.

# Оглавление