

О РЕШЕНИИ ПЕРВОЙ ПРОБЛЕМЫ ЭЙНШТЕЙНА

Г.И.Шипов

shipov@aha.ru, website <http://www.shipov.com>

Введение

Альберт Эйнштейн оставил нам огромное научное наследие, в котором особое место занимают две проблемы, это:

- 1) геометризация уравнений электромагнитного поля и
- 2) геометризация тензора энергии-импульса в уравнениях общерелятивистской теории гравитации (геометризация полей материи или квантовых полей).

Решение этих проблем А.Эйнштейн считал настолько важным делом для теоретической физики, что посвятил этому 30 лет своей творческой жизни в науке. Он интуитивно догадывался, что существующие уравнения электродинамики Максвелла-Лоренца не могут быть окончательными, поскольку они представляют собой систему линейных уравнений, а в мире все подчиняется нелинейным законам. Несмотря на значительные успехи, достигнутые нами в результате использования уравнений классической электродинамики Максвелла-Лоренца и квантовой электродинамики Максвелла-Дирака, существуют нерешенные проблемы теоретического и экспериментального характера, не позволяющие рассматривать электродинамику как окончательную теорию.

Пожалуй наиболее значительной теоретической трудностью, которая определяет ограниченность уравнений электродинамики, оказывается нарушение релятивистской инвариантности уравнений (нарушений СТО) в сильных электромагнитных полях и при ультрарелятивистских скоростях [8]. В обоих случаях мы имеем дело с большими ускорениями зарядов, когда преобразования Лоренца не могут быть использованы в силу того, что приближенное рассмотрение ускоренных реальных систем отсчета, как систем инерциальных, становится неправомерным и перестает соответствовать действительности. Иными словами, в сильных электромагнитных полях и при ультрарелятивистских скоростях уравнения электродинамики Максвелла-Лоренца-Дирака должны быть заменены новыми уравнениями, справедливыми при любых ускорениях.

Что касается эксперимента, то мы не имеем права закрывать глаза на эксперименты Тесла, воспроизводимые в настоящее время во многих лабораториях мира. Теоретический анализ этих экспериментов показывает, что существует новый вид электромагнитного поля, который не описывается уравнениями Максвелла в виду того, что заряд в ней не зависит от времени. Введение в электродинамику в качестве источников полей переменных зарядов позволяет рассматривать в электродинамике продольные электромагнитные поля, обладающие рядом экзотических свойств.

В настоящей работе будет предложено решение первой проблемы Эйнштейна в рамках параметрической римановой геометрии. В работе предложены уравнения геометризованной нелинейной электродинамики с тензорным потенциалом [8]. Такая электродинамика переходит в электродинамику Максвелла-Лоренца в слабых электромагнитных полях и при слабо релятивистских скоростях зарядов. Анализ ее уравнений устанавливает связь между нарушением принципов СТО и ядерными взаимодействиями, обнаруженными Э.Резерфордом [6] в области действия сильных электромагнитных полей.

1 Традиционное "доказательство" релятивистской инвариантности уравнений электродинамики

Для разъяснения своей позиции я вынужден вернуться к основам электродинамики и шаг за шагом проследить за ходом мысли теоретиков, которые создавали образ современного понимания инвариантности уравнений Максвелла-Лоренца относительно преобразований Лармора-Лоренца. По ходу изложения я укажу пункты, в которых экспериментальные данные были дополнены теоретическими соображениями и мысленными экспериментами.

Я сразу приведу общепринятое (якобы) "доказательство" релятивистской инвариантности (т.е. справедливости уравнений электродинамики для скоростей заряженных частиц, сколь угодно близких к скорости света) уравнений Максвелла-Лоренца, записанных в четырехмерном виде [3]

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i \quad i, j, k \dots = 0, 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0, \quad (2)$$

$$mc \frac{du^i}{ds_0} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k \quad (3)$$

при преобразованиях Лармора-Лоренца [1]

$$x' = (x - vt)\beta, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = (t - \frac{xv}{c^2})\beta, \quad (I)$$

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = (E_y - \frac{v}{c} H_z)\beta, \quad E'_z = (E_z + \frac{v}{c} H_y)\beta, \quad (II)$$

$$H'_x = H_x, \quad H'_y = (H_y + \frac{v}{c} E_z)\beta, \quad H'_z = (H_z - \frac{v}{c} E_y)\beta,$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4)$$

Здесь штрихом обозначены координаты, время и электромагнитные поля в системе отсчета S' , которая движется относительно системы S с постоянной скоростью $v = const$ вдоль оси X .

Например, при "доказательстве" релятивистской инвариантности уравнений (1) обычно приводят следующие аргументы. В правой части уравнений (1) стоит контравариантный 4-вектор тока j^i , умноженный на скаляр $-4\pi/c$, т.е. правая часть уравнений (1) - контравариантный 4-вектор. В левой части уравнений (1) мы имеем контравариантный тензор электромагнитного поля F^{ik} , на который действует ковариантный оператор $\partial/\partial x^k$. В результате этого действия в левой части уравнений (1) также стоит контравариантный вектор. Применяя к правой и левой частям уравнений (1) преобразования Лармора-Лоренца (I) (II), получим штрихованные уравнения

$$\frac{\partial F^{i'k'}}{\partial x^{k'}} = -\frac{4\pi}{c} j^{i'} \quad i', j', k' \dots = 0, 1, 2, 3, \quad (5)$$

записанные в системе отсчета S' . Поскольку уравнения (1) и (5) не меняют своего вида при преобразованиях (I) и (II), то они инвариантны относительно этих преобразований. Подобным образом происходит "доказательство" релятивистской инвариантности уравнений (2) и (3). На самом деле мы не доказываем, а постулируем релятивистскую инвариантность уравнений электродинамики, поскольку это доказательство может быть получено только прямыми вычислениями и если это проделать, то мы обнаружим, что при больших ускорениях заряженных частиц (т.е. в сильных электромагнитных полях) никакой релятивистской инвариантности уравнений Максвелла-Лоренца относительно преобразований Лармора-Лоренца не существует. В этом случае необходимо модернизировать уравнения электродинамика так, чтобы их релятивистская инвариантность выполнялась для любых полей и ускорений. С моей точки зрения, этот факт является одной из причин кризиса современной научной парадигмы. Ошибочное понимание релятивистской инвариантности уравнений электродинамики ставит под сомнение релятивистскую инвариантность уравнений квантовой электродинамике, о которой ее создатель П. Дирак однажды произнес следующие печальные слова [2]:

Правильный вывод состоит в том, что основные уравнения неверны. Их нужно существенно изменить, с тем, чтобы в теории вообще не возникали бесконечности и чтобы уравнения решались точно, по обычным правилам, без всяких трудностей. Это условие потребует каких-то очень серьезных изменений: небольшие изменения ничего не дадут.

Я полностью присоединяюсь к мнению П.Дирака и не только потому, что он гениальный физик, но и потому что мне удалось найти такое обобщение уравнений электродинамики, в котором классические и квантовые принципы теории имеют единую основу [8]. Я также могу с уверенностью сказать, что нашел релятивистски инвариантные уравнения электродинамики, которые не только разрешают некоторые трудности теории, но и дают возможность понять "аномальные" электродинамические эксперименты.

2 Уравнения классической электродинамики, полученные из эксперимента и уравнения Максвелла

Мы запишем уравнения классической электродинамики, полученные непосредственно из эксперимента, в дифференциальной форме:

закон Кулона

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (6)$$

закон Ампера

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad (7)$$

закон отсутствия свободных магнитных зарядов

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad (8)$$

закон Фарадея

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = 0. \quad (9)$$

Первые три из этих законов получены из экспериментов с постоянными токами и только закон Фарадея найден при исследования свойств переменных токов.

Заслуга Максвелла состоит в том, что он обобщил закон Кулона (6) на случай, когда плотность заряженной материи ρ зависит от времени. Действительно, пусть мы имеем плотность одного заряда в виде

$$\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (10)$$

где δ – дельта функция Дирака. Тогда ток \mathbf{j} можно представить как

$$\mathbf{j} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

где $\mathbf{v} = \partial\mathbf{r}_0/\partial t$ – скорость заряда, поскольку \mathbf{r}_0 – координата заряда.

Определим частную производную $\partial\rho/\partial t$ в виде [3]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{r}_0} \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial t} = -\mathbf{v}\text{grad}\rho = -\text{div}(\rho\mathbf{v}) = -\text{div}\mathbf{j}.$$

Для плотности ρ , зависящей от времени, из закона Кулона (6) следует

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \text{div} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Объединяя последние два уравнения, имеем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\mathbf{j} = \text{div} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) = 0 \quad (11)$$

Используя это соотношение, Максвелл производит замену

$$\mathbf{j} \rightarrow \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

в уравнениях (7). Окончательно Максвелл записал уравнения поля электродинамики в виде системы

$$\text{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \text{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \quad (12)$$

$$\text{div}\mathbf{H} = 0, \quad \text{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = 0.$$

В полученном теоретическом обобщении четырех экспериментальных законов (6) - (9) фактически используется закон сохранения заряда

$$e = \int \rho dV = \text{const}, \quad dV = dx dy dz, \quad (13)$$

записанный в виде

$$\frac{de}{dt} = \frac{d}{dt} \int \rho dV = \int \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{v}) \right) dV = 0, \quad (14)$$

или

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\mathbf{j} = 0. \quad (15)$$

3 Ограничения, возникающие при доказательстве инвариантности уравнений Максвелла относительно преобразований Лармора-Лоренца

Для доказательства инвариантности уравнений Максвелла необходимо записать их покомпонентно

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho, \quad (16)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} + 4\pi\rho u_x \right), \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_y}{\partial t} + 4\pi\rho u_y \right), \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_z}{\partial t} + 4\pi\rho u_z \right), \end{aligned} \quad (19)$$

и проделать необходимые вычисления, используя преобразования Лармора-Лоренца (I) и (II).

3.1 Теорема Лармора-Эйнштейна

Еще в 1900 году Лармор в своей книге "Эфир и материя"[1] показал, что уравнения Максвелла вне источников, записанные в системе S

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

не меняют своего вида в системе S'

$$\operatorname{div}'\mathbf{E}' = 0, \quad \operatorname{rot}'\mathbf{E}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t'}, \quad \operatorname{div}'\mathbf{H}' = 0, \quad \operatorname{rot}'\mathbf{H}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'},$$

при условии, что скорость света во всех инерциальных системах отсчета постоянна ($c = \text{const}$), а координаты и поля в этих системах связаны преобразованиями (I) и (II). Для этого Лармор использовал систему уравнений(16)- (19) без зарядов и, с помощью соотношений (I) и (II), необходимыми вычислениями провел доказательство. Через пять лет Эйнштейн в своей знаменитой работе [4] повторил эти вычисления и доказал инвариантность уравнений Максвелла без зарядов относительно преобразований Лармора-Лоренца.

3.2 Теорема Эйнштейна-Пуанкаре для уравнений Максвелла с источниками поля

Почти одновременно Эйнштейн [4] и Пуанкаре [9] показали, что уравнения Максвелла с источниками поля

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\rho\mathbf{u}\right),$$

записанные в системе S , инвариантны относительно преобразований Лармора-Лоренца (I) и (II), т.е. принимают в системе S' вид

$$\operatorname{div}'\mathbf{E}' = 4\pi\rho', \quad \operatorname{rot}'\mathbf{E}' = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}'}{\partial t'}, \quad \operatorname{div}'\mathbf{H}' = 0, \quad \operatorname{rot}'\mathbf{H}' = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathbf{E}'}{\partial t'} + 4\pi\rho'\mathbf{u}'\right),$$

если компоненты скорости заряда и плотность заряда преобразуются как

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\beta(1 - u_x v/c^2)}, \quad u'_z = \frac{u_z}{\beta(1 - u_x v/c^2)}, \quad (20)$$

$$\rho' = \rho\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)\beta. \quad (21)$$

Соотношения (20) получаются из равенства $\mathbf{u}' = d\mathbf{x}'/dt'$ после подстановки в него координатных преобразований (I), а равенство (21) следует из условия неизменности уравнений поля с источниками в системах отсчета S и S' .

4 Третий (неявный) постулат специальной теории относительности

В своей основополагающей статье 1905 года [4] Эйнштейн постулирует два принципа специальной теории относительности: 1) принцип равноправия всех инерциальных систем отсчета, связанных преобразованиями Лармора-Лоренца; 2) принцип неизменности скорости света в инерциальных системах отсчета, движущихся с разными (но постоянными) скоростями. В этой же работе, при доказательстве инвариантности уравнений движения заряда относительно преобразований Лармора-Лоренца (I) и (II), Эйнштейн *неявно вводит третий дополнительный постулат*, утверждающий инвариантность заряда при переходе из системы отсчета S в систему S' , т.е.

$$e' = e = inv. \quad (22)$$

Покажем, что в общем случае при преобразованиях Лармора-Лоренца соотношение (22) не выполняется. Действительно, в системе отсчета S заряд e определяется через плотность заряда ρ как

$$e = \frac{1}{4\pi} \int \rho dx dy dz.$$

Соответственно, в системе отсчета S' мы должны записать

$$e' = \frac{1}{4\pi} \int \rho' dx' dy' dz' .$$

При движении системы отсчета S' вдоль оси X , объем $dV = dx dy dz$ преобразуется как

$$dx' dy' dz' = \beta dx dy dz .$$

Учитывая соотношение (21), имеем для точечного заряда с плотностью (10)

$$e' = \frac{1}{4\pi} \int \rho \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) \beta^2 dx dy dz = e \beta^2 \left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right). \quad (23)$$

Совершенно очевидно, что равенства (22) и (23) совпадают только при условии, что

$$\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right) \beta^2 = 1 . \quad (24)$$

Это уравнение имеет смысл, если

$$\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right) = \beta^{-2}$$

и, следовательно,

$$u_x = v = const . \quad (25)$$

В результате этого простого анализа, мы приходим к выводу, что условие инвариантности заряда $e' = e = inv$ при преобразованиях Лармора-Лоренца выполняется если:

- а) система отсчета S' связана с зарядом;
- б) заряд в уравнениях Максвелла движется прямолинейно и равномерно.

Из (21) находим, что при этих условия плотность заряда преобразуется как

$$\rho' = \rho \beta^{-1} .$$

Конечно же не я первый заметил, что релятивистская инвариантность уравнений Максвелла при преобразованиях Лармора-Лоренца ограничена равномерным и прямолинейным движением источников поля. Вот что пишет студент В. Паули (ему тогда было 19 лет) об уравнениях Максвелла [5]:

Уравнения Максвелла строго справедливы только для равномерно движущихся тел и степень их точности, вообще говоря, тем больше, чем меньше ускорение материи.

Жаль только, что Паули не дал аналитического вывода, подобного сделанному нами выше, подтверждающего его высказывания. Иначе, возможно, мы имели бы совсем другую электродинамику.

5 Ограничения, возникающие при доказательстве инвариантности уравнений движения заряда

Условие (25) было использовано Эйнштейном при доказательстве инвариантности уравнений движения заряда во внешних поля [4]. Эйнштейн делает следующие выкладки. Пусть в системе отсчета S заряд e с массой покоя m движется согласно уравнениям

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = e E_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = e E_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = e E_z. \quad (26)$$

Перейдем в систему отсчета S' , которая движется со скоростью $v = \text{const}$ вдоль оси X . Полагая, что в системе S' уравнения (26) не меняют своего вида, запишем

$$m' \frac{d^2 x'}{dt'^2} = e' E'_x, \quad m' \frac{d^2 y'}{dt'^2} = e' E'_y, \quad m' \frac{d^2 z'}{dt'^2} = e' E'_z. \quad (27)$$

Записав уравнения в системе отсчета S' , Эйнштейн сразу предполагает инвариантность заряда $e' = e = inv$ и массы покоя $m' = m = inv$. Но, как было показано выше, из инвариантности заряда следует, что для выполнения этой инвариантности заряд должен двигаться прямолинейно и равномерно и, кроме того, система отсчета S' связана с самим зарядом. Ясно, что прямолинейное и равномерное движение заряда возможно только в отсутствии внешних электромагнитных полей. Эйнштейн это прекрасно понимает и поэтому называет раздел, где он доказывает инвариантность уравнений движения не свободного заряда - "Динамика (слабо ускоренного) электрона"cite4. Для слабо ускоренной частицы условия (22) и (25) выполняются лишь приближенно

$$u'_x \simeq 0, \quad u_x \simeq v = \text{const}, \quad e' \simeq e = inv, \quad m' = m. \quad (28)$$

Пусть теперь в системе отсчета S' заряд «мгновенно покоится». Выражение «мгновенно покоится» означает, что система отсчета S' связана в данный момент с самим зарядом. Для заряда, движущегося прямолинейно и равномерно, S' является системой отсчета, в которой он «мгновенно покоится» во всех точках траектории. В случае малого ускорения, когда выполняются условия (28), система отсчета S' является ускоренной квазиинерциальной системой. Поэтому для перехода из инерциальной системы S в квазиинерциальную систему S' Эйнштейн использует "приближенные" преобразования Лармора-Лоренца (I) и (II). Вычисляя компоненты ускорения в уравнениях (27), Эйнштейн находит [4]

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{du'_x}{dt'} = \frac{1}{\beta} \frac{\dot{u}_x(1 - u_x v/c^2) + (u_x - v)\dot{u}_x v/c^2}{(1 - u_x v/c^2)^3}, \quad (29)$$

$$\frac{d^2 y'}{dt'^2} = \frac{du'_y}{dt'} = \frac{1}{\beta} \frac{\dot{u}_y(1 - u_x v/c^2) + u_y \dot{u}_x v/c^2}{(1 - u_x v/c^2)^3}, \quad (30)$$

$$\frac{d^2 z'}{dt'^2} = \frac{du'_z}{dt'} = \frac{1}{\beta} \frac{\dot{u}_z(1 - u_x v/c^2) + u_z \dot{u}_x v/c^2}{(1 - u_x v/c^2)^3}, \quad (31)$$

где

$$\dot{u}_x = du_x/dt, \quad \dot{u}_y = du_y/dt, \quad \dot{u}_z = du_z/dt. \quad (32)$$

Используя первые два условия (28), можно записать производные (29–31) в виде

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \beta^3 \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt^2}(u_x \beta), \quad (33)$$

$$\frac{d^2 y'}{dt'^2} = \beta^2 \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad (34)$$

$$\frac{d^2 z'}{dt'^2} = \beta^2 \frac{d^2 z}{dt^2}. \quad (35)$$

Первое из этих соотношений доказывается следующим образом. Из условия малости ускорения $u_x(t) \simeq v = \text{const}$ вместо (4) можно считать, что

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - u_x^2(t)/c^2}} \simeq \text{const}, \quad (36)$$

поэтому

$$\frac{d}{dt}(u_x\beta) = \beta\dot{u}_x + u_x\dot{\beta} = \beta\dot{u}_x + \beta^3\dot{u}_x\frac{u_x^2}{c^2} = \beta^3\dot{u}_x\left(\frac{u_x^2}{c^2} + \frac{1}{\beta}\right) = \beta^3\dot{u}_x.$$

Здесь было использовано соотношение

$$\left(\frac{u_x^2}{c^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) \simeq 1,$$

которое следует из (36). Подставляя (33)–(35) в уравнения (27) и учитывая соотношения (28), а также преобразование полей (II), запишем уравнения (27) в виде

$$\begin{aligned} m\beta^3\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(mu_x\beta) = eE_x, \\ m\beta\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(mu_y\beta) = e\left(E_y - \frac{v}{c}H_z\right), \\ m\beta\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(mu_z\beta) = e\left(E_z + \frac{v}{c}H_y\right). \end{aligned} \quad (37)$$

Поскольку $v \simeq u_x$ и $u_y = u_z = 0$, то мы можем переписать уравнения (37) как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(mu_x\beta) &= e\left(E_x + \frac{u_y}{c}H_z - \frac{u_z}{c}H_y\right), \\ \frac{d}{dt}(mu_y\beta) &= e\left(E_y + \frac{u_z}{c}H_x - \frac{u_x}{c}H_z\right), \\ \frac{d}{dt}(mu_z\beta) &= e\left(E_z + \frac{u_x}{c}H_y - \frac{u_y}{c}H_x\right). \end{aligned} \quad (38)$$

Естественно, что в случае больших ускорений, вызываемых сильными электромагнитными полями, уравнения движения (38) должны иметь совсем другой вид.

6 Четырехмерная запись уравнений классической электродинамики

Далее, следуя Г. Минковскому, можно записать уравнения (38) в четырехмерном виде. Для этого введем четырехмерное псевдоевклидово пространство Минковского с интервалом

$$\begin{aligned} ds_0 &= cdt \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right] \right\}^{1/2} = \\ &= cdt \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (39)$$

четырёхмерный вектор скорости u^i с компонентами

$$u^i = \left(\beta, \frac{u^\alpha}{c} \beta \right), \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (40)$$

и четырёхмерный тензор электромагнитного поля $F^{ik} = -F^{ki}$ с компонентами

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad i, k = 0, 1, 2, 3. \quad (41)$$

6.1 Четырёхмерная запись уравнений движения заряда

Используя соотношения (39)–(41), перепишем уравнения (38) следующим образом:

$$\frac{d}{ds_0}(mu^\alpha) = \frac{e}{c^2} F^{i\alpha} u_i, \quad \alpha, \beta \dots = 1, 2, 3. \quad (42)$$

Добавляя к уравнениям (42) уравнение для мощности электрических сил, которое через величины (39)–(41) запишется как

$$\frac{d}{ds_0}(mu^0) = \frac{e}{c^2} F^{i0} u_i, \quad (43)$$

получим уравнения движения классической электродинамики (3), записанные в четырёхмерном виде. При выводе этих уравнений мы нигде не вышли за рамки приближенных равенств (28). Поэтому четырёхмерная запись уравнений движения сохраняет условие малости ускорений заряда и в общем случае четырёхмерные уравнения движения (3) не являются релятивистски инвариантными уравнениями.

6.2 Четырёхмерная запись уравнений Максвелла

Перепишем систему уравнений с источниками поля в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -\frac{4\pi}{c} \rho u_x, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{\partial H_x}{\partial z} + \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\frac{4\pi}{c} \rho u_y, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -\frac{4\pi}{c} \rho u_z, \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 4\pi \rho. \end{aligned} \quad (44)$$

Используя тензор электромагнитного поля (41), запишем первые три из этих уравнений как

$$\frac{\partial F^{\alpha k}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (45)$$

а четвертое уравнение в виде

$$\frac{\partial F^{0k}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^0. \quad (46)$$

Здесь четырехмерный вектор плотности тока имеет следующие компоненты

$$j^k = (\rho c, \rho u_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (47)$$

и

$$x^k = (ct, x_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, 3$$

– четырехмерные координаты пространства Минковского. Объединяя уравнения (45) и (46), получим уравнения (1), представляющие собой четырехмерную запись уравнений Максвелла с источниками. С помощью тензора электромагнитного поля (41) уравнения поля (17) и (18) также приводятся к четырехмерной записи, имеющей вид уравнений (2). Таким образом, четырехмерная запись уравнений Максвелла означает всего лишь компактную запись трехмерных уравнений и ничего не добавляет к доказательству ковариантности этих уравнений относительно преобразований Лармора-Лоренца. Как было показано Эйнштейном, при доказательстве релятивистской инвариантности уравнений Максвелла были получены соотношения (20) и (21). Однако третий постулат $e' = e$ требует, чтобы система отсчета S' была связана с зарядом, создающим поле, причем заряд должен двигаться равномерно и прямолинейно или с малым ускорением. В противном случае доказать релятивистскую инвариантность уравнений Максвелла невозможно.

7 Пределы применимости специального принципа относительности в электродинамике

Выше было показано, что принятая теоретиками четырехмерная запись уравнений классической электродинамики допустима только при условии, что выполняется третий неявный постулат теории, требующий инвариантности заряда относительно преобразований Лармора-Лоренца. При этом все системы отсчета оказываются связанными с зарядами, двигающимися с малыми ускорениями, т.е. квазиинерциально. Следуя Эйнштейну, мы будем считать, что для квазиинерциальных систем отсчета справедлив (приближенно, конечно) специальный принцип относительности и определим пределы его применимости.

Величину внешних полей, для которых справедлив специальный принцип относительности в электродинамике Максвелла-Лоренца, можно определить следующим образом. Умножим уравнения движения (3), записанные в виде

$$\frac{d^2 x^i}{ds_0^2} = \frac{e}{mc^2} F^{ik} \frac{dx_k}{ds_0}$$

на $r_e = e^2/mc^2$ – классический радиус электрона (характерный параметр классической электродинамики)

$$\frac{e^2}{mc^2} \frac{d^2 x^i}{ds_0^2} = \frac{e^3}{m^2 c^4} F^{ik} \frac{dx_k}{ds_0}$$

Условие малости ускорения означает, что безразмерное ускорение в левой части этих уравнений мало, откуда следует

$$\left| \frac{e^3}{m^2 c^4} F^{ik} \frac{dx_k}{ds_0} \right| \ll 1. \quad (48)$$

Ускорение, удовлетворяющее неравенству (48), как раз и определяет границы применимости специального принципа относительности в электродинамике.

В структурном виде неравенство (48) можно записать как

$$\left| \frac{e^3}{m^2 c^4} \frac{F}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right| \ll 1. \quad (49)$$

Из этого неравенства следует, что специальный принцип относительности в электродинамике нарушается:

- а) в сильных электромагнитных полях;
- б) при ультрарелятивистских скоростях заряженных частиц.

7.1 Сильные электромагнитные поля

При нерелятивистских скоростях из (49) следует

$$|F| \ll \frac{m^2 c^4}{e^3}.$$

Подставляя сюда заряд и массу электрона, имеем следующую оценку для сильных электромагнитных полей

$$E, H \ll 10^{16} \text{ ед. СГСЕ}. \quad (50)$$

Электромагнитные поля, удовлетворяющие неравенству (50), являются слабыми, и для малых времен наблюдения специальный принцип относительности для таких полей выполняется с достаточной степенью точности. Для заряда, равного заряду электрона, слабые поля E и H появляются на расстояниях

$$r \geq r_e = e^2/mc^2 \simeq 2,8 \times 10^{-13} \text{ см} \quad (51)$$

от электрона.

7.2 Ультрарелятивистские скорости

Из соотношений (50) и (51) следует, что для нерелятивистских частиц отклонения от законов электродинамики (за счет нарушения специального принципа относительности) должны наблюдаться на ядерных расстояниях. Действительно, начиная с экспериментов Э. Резерфорда [6] по упругому рассеянию нерелятивистских α -частиц на ядрах золота и по сегодняшний день, физики наблюдают отклонение от законов электродинамики Максвелла-Лоренца при взаимодействии частиц в сильных электромагнитных полях. Для объяснения этих явлений пришлось ввести в теорию "руками" феноменологические ядерные потенциалы, не следующие не из каких уравнений.

Неравенство (49) позволяет ответить на самом собой напрашивающийся вопрос, почему уравнения классической и, особенно, квантовой электродинамики так точно описывают атомные явления? Дело в том, что на атомных расстояниях порядка 10^{-8} см напряженности электромагнитных полей достигают величины порядка 10^8 ед. СГСЕ. Из неравенства (49) находим, что для таких полей нарушение законов электродинамики Максвелла-Лоренца будет наблюдаться при ультрарелятивистских скоростях электронов, отличающихся от скорости света в восьмом знаке после запятой, т.е при $v \geq 0,99999999c$. Именно поэтому теоретические предсказания квантовой электродинамики подтверждается на атомных расстояниях с большой точностью.

Для электромагнитных полей больших чем атомные, отклонения от законов электродинамики могут наблюдаться и уже наблюдаются и при упругом рассеянии релятивистских электронов на ядрах [7]. Правда, как и в случае опытов Резерфорда, для объяснения наблюдаемых отклонений физики ввели "руками" в теорию размеры ядер - так называемые электромагнитные ядерные формфакторы.

Вероятнее всего, введенные в физику феноменологические ядерные потенциалы и электромагнитные формфакторы просто имитируют электромагнитные явления, связанные с нарушением специального принципа относительности.

Сделанные нами выводы оказываются справедливыми как для классической, так и для квантовой электродинамики. Вот что говорит П. Дирак о границах применимости квантовой электродинамики [2]:

Существующая квантовая теория хороша до тех пор, пока мы не пытаемся распространить ее слишком далеко, а именно когда мы не пытаемся применить ее к частицам высоких энергий, а также в области малых расстояний .

8 Векторный потенциал гравитационного поля в теории Эйнштейна

В.Фок в своей знаменитой книге [14] отметил, что решающий шаг при обобщении теории гравитации Ньютона был сделан А.Эйнштейном (совместно с М.Гроссманом) в 1913 г. [12], когда А.Эйнштейн, при выводе уравнений движения массы m в гравитационном поле, записал действие S в виде

$$S = -mc \int ds, \quad (52)$$

где $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ - риманова метрика пространства, g_{ik} - метрический тензор, интерпретируемый Эйнштейном как тензорный потенциал гравитационного поля. Применяя к (52) вариационный принцип, А.Эйнштейн получает уравнения движения массы m во внешнем гравитационном поле в виде

$$m \frac{d^2 x^i}{ds^2} + m \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad (53)$$

$$i, j, k \dots = 0, 1, 2, 3,$$

где напряженность сильного гравитационного поля Γ_{jk}^i определяется как

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{im} (g_{jm,k} + g_{km,j} - g_{jk,m}), \quad , k = \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (54)$$

8.1 Гравитационная сила, подобная силе Лоренца

В слабых гравитационных полях тензор g_{ik} удовлетворяет условиям

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \gamma_{ik}, \quad |\gamma_{ik}| \ll 1, \quad (55)$$

где

$$\eta_{ik} = \eta^{ik} = \text{diag}(1 - 1 - 1 - 1)$$

– метрический тензор пространства Минковского. Если условия слабости поля выполняются, то $ds \simeq ds_0 = cdt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ и трехмерную часть уравнений (53) можно представить как

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{ds_0^2} = -m\Gamma_{00}^\alpha \frac{dx^0}{ds_0} \frac{dx^0}{ds_0} - m2\Gamma_{0\beta}^\alpha \frac{dx^0}{ds_0} \frac{dx^\beta}{ds_0} - m\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds_0} \frac{dx^\gamma}{ds_0}, \quad (56)$$

$$\alpha, \beta, \gamma \dots = 1, 2, 3.$$

Предположим теперь, что частица движется со слабо релятивистской скоростью (или скорость не является ультрарелятивистской), тогда приближенно можно полагать

$$ds_0 \simeq cdt, \quad \frac{dx^0}{ds_0} = 1, \quad \frac{dx^\alpha}{ds_0} = \frac{dx^\alpha}{cdt}.$$

Учитывая эти условия и опуская в уравнениях (56) члены более высокого порядка по v/c , имеем

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = -mc^2\Gamma_{00}^\alpha - 2mc^2\Gamma_{0\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{cdt}. \quad (57)$$

В рассматриваемом приближении из соотношений (54) следует

$$\Gamma_{\alpha 00} = g_{\alpha 0,0} - \frac{1}{2}g_{00,\alpha}, \quad \Gamma_{\alpha\beta 0} = \frac{1}{2}(g_{\alpha 0,\beta} - g_{\beta 0,\alpha}).$$

Подставляя эти величины в уравнения (57), получим [13]

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = -mc^2(g_{\alpha 0,0} - \frac{1}{2}g_{00,\alpha}) - mc^2(g_{\alpha 0,\beta} - g_{\beta 0,\alpha}) \frac{dx^\beta}{cdt}. \quad (58)$$

В работе [13] А.Эйнштейн отмечает значительное соответствие уравнений движения (58) уравнениям движения заряда в электродинамике, за исключением множителя $1/2$ и знака перед членом $g_{00,\alpha}$. Аналогия между электродинамикой и гравитационной становится еще более наглядной, если ввести векторный потенциал гравитационного поля с компонентами

$$\Theta_0 = \frac{c^2}{2}\gamma_{00}, \quad \Theta_\alpha = \gamma_{\alpha 0}c^2. \quad (59)$$

Используя потенциал (59) и соотношение (55), запишем уравнения (58) в виде

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} &= -m(\Theta_{\alpha,0} - \Theta_{0,\alpha}) - m(\Theta_{\alpha,\beta} - \Theta_{\beta,\alpha}) \frac{dx^\beta}{cdt} = \\
&= m(\Theta_{k,\alpha} - \Theta_{\alpha,k}) \frac{dx^k}{cdt} = m\Phi^{\alpha k} \frac{dx_k}{cdt},
\end{aligned} \tag{60}$$

где

$$\Phi_{ik} = \Theta_{k,i} - \Theta_{i,k} \tag{61}$$

– гравитационный аналог тензора электромагнитного поля F_{ik} .

Разделив обе части уравнений (60) на c^2 , представим их как

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds_0^2} = \frac{1}{c^2} \Phi^{\alpha k} \frac{dx_k}{ds_0}, \quad \alpha, \beta \dots = 1, 2, 3. \tag{62}$$

Эти уравнения движения содержат гравитационный аналог силы Лоренца

$$F^\alpha = m \frac{1}{c^2} \Phi^{\alpha k} \frac{dx_k}{ds_0}.$$

Они подобны уравнениям движения заряда (42) и вполне могут быть использованы для расчетов при движении масс в слабых гравитационных полях и не слишком больших скоростях.

Покажем, что потенциалом гравитационного поля следует считать добавку к плоской метрике γ_{ik} , а не метрический тензор g_{ik} . Для этого рассмотрим движение массы m в гравитационном поле, создаваемом массой M . Решение уравнений Эйнштейна, которое определяет гравитационное поле массы M , описывается метрикой Шварцшильда [3]. В квазидекартовых координатах эта метрика может быть представлена в виде

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\varphi_g}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\varphi_g}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{63}$$

где $\varphi_g = -MG/r$ – ньютоновский потенциал. Из соотношений (59) и метрики (63), находим

$$\gamma_{00} = \frac{2\varphi_g}{c^2} = \frac{2\Theta_0}{c^2},$$

откуда следует

$$\Theta_0 = \varphi_g = -\frac{MG}{r} \tag{64}$$

С другой стороны, знак перед Θ_0 в случае гравитационного взаимодействия определяется знаком силы притяжением масс. Массы в теории гравитации имеют одинаковый знак и при этом притягиваются. В самом деле, в статическом приближении из (60) имеем

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = m\Theta_{0,\alpha} = m\varphi_{g,\alpha} = -m \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{MG}{r} = \frac{mMg}{r^3} x^\alpha. \tag{65}$$

В электродинамике одноименные заряды отталкиваются, поэтому в электродинамике должен стоять противоположный знак в правой части (65).

8.1.1 Обобщенный векторный потенциал $\tilde{\Theta}_i$

Представим риманову метрику теории Эйнштейна в виде

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\eta_{ik} + \gamma_{ik}) dx^i dx^k = \eta_{ik} dx^i dx^k + \gamma_{ik} dx^i dx^k = \\ &= ds_0^2 + \gamma_{ik} dx^i dx^k = \left(1 + \gamma_{ik} \frac{dx^i dx^k}{ds_0 ds_0} \right) ds_0^2. \end{aligned} \quad (66)$$

Второй член в скобках соотношения (66) можно расписать как

$$\begin{aligned} &\left\{ \gamma_{00} \left(\frac{dx^0}{ds_0} \right)^2 + 2\gamma_{\alpha 0} \frac{dx^\alpha dx^0}{ds_0 ds_0} + \gamma_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha dx^\beta}{ds_0 ds_0} \right\} = \\ &= \frac{2}{c^2} \left\{ \tilde{\Theta}_0 \frac{dx^0}{ds_0} + \tilde{\Theta}_\alpha \frac{dx^\alpha}{ds_0} \right\} = \frac{2}{c^2} \tilde{\Theta}_i \frac{dx^i}{ds_0}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (67)$$

где мы ввели обобщенный векторный потенциал $\tilde{\Theta}^i = (\tilde{\Theta}_0, \tilde{\Theta}_\alpha)$ имеет следующие компоненты

$$\tilde{\Theta}_0 = \frac{1}{2} \gamma_{00} c^2 \frac{dx^0}{ds_0} = \Theta_0 \frac{dx^0}{ds_0}, \quad (68)$$

$$\tilde{\Theta}_\alpha = \gamma_{\alpha 0} c^2 \frac{dx^0}{ds_0} + \frac{c^2}{2} \gamma_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{ds_0} = \Theta_\alpha \frac{dx^0}{ds_0} + \frac{c^2}{2} \gamma_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{ds_0} \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (69)$$

Через потенциал $\tilde{\Theta}_i$ квадрат интервала (66) можно представить как

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2}{c^2} \tilde{\Theta}_i \frac{dx^i}{ds_0} \right) ds_0^2. \quad (70)$$

Если гравитационные поля являются слабыми, то пространство событий мало отличается от пространства Минковского при этом выполняется условие

$$\left| \frac{2}{c^2} \tilde{\Theta}_i \frac{dx^i}{ds_0} \right| \ll 1. \quad (71)$$

Извлекая квадратный корень из левой и правой частей равенства (70) и используя условие (71), находим приближенно

$$ds = \left(1 + \frac{1}{c^2} \tilde{\Theta}_i \frac{dx^i}{ds_0} \right) ds_0 \quad (72)$$

Используя соотношение (72) в интеграле (52), мы получим в результате обычной вариационной процедуры уравнения:

$$\frac{d^2 x^i}{ds_0^2} = \frac{1}{c^2} \tilde{\Phi}^{ik} \frac{dx_k}{ds_0}, \quad \tilde{\Phi}_{ik} = \tilde{\Theta}_{k,i} - \tilde{\Theta}_{i,k}, \quad (73)$$

подобные уравнениям движения (3) электродинамики Максвелла–Лоренца.

9 Уравнения Эйнштейна для слабых гравитационных полей

Исторически сложилось так, что А.Эйнштейн сперва находит уравнения движения массы m в сильных гравитационных полях

$$m \frac{d^2 x^i}{ds^2} + m \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

и только через два года [15] в 1915 г. находит "правильные" уравнения гравитационного поля

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}. \quad (74)$$

Сам А.Эйнштейн считал, что уравнения поля (74) не являются строгими, поскольку их правая часть, куда входит тензор энергии-импульса материи T_{ik} , пишется руками и не имеет геометрической природы. На строгость претендуют только вакуумные уравнения Эйнштейна

$$R_{ik} = 0. \quad (75)$$

Поэтому будет правильным рассмотреть сперва вакуумные уравнения Эйнштейна (75) для слабых гравитационных полей.

9.1 Векторный потенциал в вакуумных уравнениях Эйнштейна

Запишем тензор Римана в виде

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + g_{np} (\Gamma_{kl}^n \Gamma_{im}^p - \Gamma_{km}^n \Gamma_{il}^p).$$

В слабых гравитационных полях выполняются условия (55), при этом вторым членом в правой части R_{iklm} можно пренебречь и записать слабую кривизну как

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 \gamma_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 \gamma_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 \gamma_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right).$$

Используя это соотношение и условие слабости поля, находим тензор Риччи

$$R_{ik} = g^{lm} R_{limk} \approx \eta^{lm} R_{limk} = \frac{1}{2} \left(-\eta^{lm} \frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 \gamma_i^l}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 \gamma_k^l}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^i \partial x^k} \right). \quad (76)$$

Наложим на гравитационный потенциал γ_{ik} дополнительные условия [3]

$$\psi_i^k = \gamma_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k \gamma, \quad \frac{\psi_i^k}{\partial x^k} = 0, \quad (77)$$

тогда соотношение (76) принимает вид

$$R_{ik} = -\frac{1}{2} \eta^{lm} \frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial x^m \partial x_m} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial x^\alpha \partial x_\alpha} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial t^2} \right). \quad (78)$$

$$\alpha, \beta \dots = 1, 2, 3, \quad i, k \dots = 0, 1, 2, 3.$$

Подставляя это соотношение в вакуумные уравнения Эйнштейна (75), находим

$$\left(\frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial x^\alpha \partial x_\alpha} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial t^2} \right) = 0$$

или, учитывая (59) и умножая на соответствующие коэффициенты,

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Theta_0 = 0, \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Theta_\alpha = 0, \quad (79)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \gamma_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha, \beta \dots = 1, 2, 3, \quad (80)$$

где Δ - оператор Лапласа. Объединяя уравнения (79), получим вакуумные уравнения Эйнштейна для векторного потенциала гравитационного поля

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Theta_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (81)$$

В приближении векторного потенциала соотношения (77) записываются как

$$c^2 \frac{\partial \psi_0^0}{\partial x^0} = \frac{c^2}{2} \frac{\partial \gamma_0^0}{\partial x^0} = \frac{\partial \Theta^0}{\partial x^0} = 0, \quad (82)$$

$$c^2 \frac{\partial \psi_0^\alpha}{\partial x^\alpha} = c^2 \frac{\partial \gamma_0^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \Theta^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (83)$$

или, объединяя эти уравнения

$$\frac{\partial \Theta^i}{\partial x^i} = 0. \quad (84)$$

Это соотношение представляет собой аналог калибровки Лоренца для векторного потенциала гравитационного поля Θ_i . В статическом случае первое из уравнений (79) принимает вид

$$\Delta \Theta_0 = 0. \quad (85)$$

Решение этого уравнения имеет вид $\Theta_0 = c/r$, где c - некоторая константа интегрирования, а $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

9.2 Векторный потенциал в уравнениях Эйнштейна с правой частью

Значение константы интегрирования c А.Эйнштейн впервые определяет из равенства $\Theta_0 = \varphi_g = -MG/r$ на основе принципа соответствия уравнений движения (53) уравнениям движения ньютоновской теории гравитации. Это было сделано в работе [16], которая опубликована перед тем, как А.Эйнштейн выводит уравнения поля (74), используя принцип наименьшего действия. И только в 1916 г. он определяет значение множителя

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (86)$$

в уравнениях поля (74), используя принцип соответствия уравнений

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = \kappa T_{00}$$

уравнению Пуассона [17]

$$\Delta\varphi_g = 4\pi G\rho, \quad (87)$$

выбрав предварительно тензор энергии-импульса T_{ik} в уравнениях поля (74) в виде

$$T_{ik} = \rho c^2 u_i u_k, \quad (88)$$

где $u_i = dx_i/ds$, $u_i u^i = 1$ – единичный вектор 4-х скорости. Сворачивая уравнения (74) с метрическим тензором g^{ik} и учитывая равенство $g_{ik}g^{ik} = 4$, имеем

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4}T, \quad T = T^i_i.$$

Используя это соотношение, перепишем уравнения поля (74) как

$$R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T \right). \quad (89)$$

Распишем эти уравнения следующим образом

$$R_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T \right), \quad (90)$$

$$R_{\alpha 0} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\alpha 0} - \frac{1}{2}g_{\alpha 0}T \right), \quad (91)$$

$$R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T \right). \quad (92)$$

Пусть теперь гравитационное поле слабое, тогда левую часть уравнений Эйнштейна (90)-(91) можно заменить на соотношения (78)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{00}}{\partial x^\alpha \partial x_\alpha} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \gamma_{00}}{\partial t^2} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}T \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \frac{\rho c^2}{2} = \frac{4\pi G}{c^2} \rho, \quad (93)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{\alpha 0}}{\partial x^\alpha \partial x_\alpha} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha 0}}{\partial t^2} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{\alpha 0}) = \frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2 u_\alpha u_0, \quad (94)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha \partial x_\alpha} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t^2} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}T \right). \quad (95)$$

Подставляя сюда векторный потенциал (59) и полагая скорости источника малыми, имеем из (93) и (94)

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Theta_0 = 4\pi G\rho, \quad (96)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Theta_\alpha = 16\pi G\rho u_\alpha. \quad (97)$$

Из последнего уравнения мы видим, что следующая из уравнений Эйнштейна пространственная часть векторного потенциала Θ_α оказывается в 4 раза больше, чем это следует из уравнений движения (53). Этот результат можно объяснить тем, что А.Эйнштейну достаточно было подобрать такой тензор энергии-импульса материи, который позволял бы установить соответствие новых уравнений гравитационного поля (89) с уравнением (87) ньютоновской теории гравитации. Для нас этого требования недостаточно по той причине, что в теории Эйнштейна уравнения поля (89) и уравнения движения (53) взаимозависимы. Действительно, из закона сохранения

$$\nabla^i (R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R) = \frac{8\pi G}{c^4} \nabla^i T_{ik} = 0 \quad (98)$$

для уравнений поля (89) следуют уравнения движения (53). Здесь ковариантная производная ∇^i берется относительно связности Γ^i_{jk} .

Чтобы получить согласованность уравнений поля и уравнений движения, нам достаточно потребовать выполнения следующих уравнений для векторного потенциала

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Theta_\alpha = 4\pi G \rho u_\alpha. \quad (99)$$

Для уравнений поля (89) это означает, что константа κ имеет разные значения для уравнений (90)-(92) и может быть представлена в виде столбца

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_{(00)} \\ \kappa_{(\alpha 0)} \\ \kappa_{(\alpha\beta)} \end{pmatrix}. \quad (100)$$

Теперь уравнения поля мы запишем как

$$R_{ik} = \kappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T \right) \quad (101)$$

или

$$R_{00} = \kappa_{(00)} \left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T \right), \quad (102)$$

$$R_{\alpha 0} = \kappa_{(\alpha 0)} \left(T_{\alpha 0} - \frac{1}{2}g_{\alpha 0}T \right), \quad (103)$$

$$R_{\alpha\beta} = \kappa_{(\alpha\beta)} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T \right). \quad (104)$$

Требую соответствия уравнений (102) и (103) в приближении слабых полей и слабо релятивистских скоростей уравнениям (87) и (99) соответственно, находим

$$\kappa_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad \kappa_{\alpha 0} = \frac{2\pi G}{c^4}. \quad (105)$$

Теперь уравнения (102) и (103) могут быть объединены в 4-х мерные уравнения

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Theta^i = \frac{4\pi G}{c} j^i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (106)$$

подобные уравнения Максвелла, где 4-х вектор тока j^i имеет следующие компоненты

$$j^i = (\rho c, \rho c u_\alpha). \quad (107)$$

Что касается константы $\kappa_{\alpha\beta}$ в уравнениях (104), то её значение остается неопределенным, поскольку у нас нет соответствующих тензорных уравнений, для которых можно было бы применить принцип соответствия для её точного определения.

10 Геометризация электромагнитного поля

В современной физике электродинамика представляется совершенной теорией, по образу и подобию которой строятся некоторые другие теории поля. Поэтому многие трудности электродинамики, связанные с ограниченностью специального принципа относительности автоматически переносятся на другие теории микромира. Основные проблемы существующей электродинамики связаны, как было показано, с тем, что мы пытаемся записывать ее уравнения в инерциальной системе отсчета, не существующей, по мнению Эйнштейна, в природе. Чтобы разрешить указанную проблему, в 1972 г. я опубликовал статью "Общерелятивистская электродинамика с тензорным потенциалом"[10], в которой была проведена геометризация уравнений электродинамики. В этой работе была использована *параметрическая геометрия Римана*, метрический тензор которой зависит не только от координат, но и от физического параметра $k = e/m$ - удельного заряда пробной заряженной частицы. Как и в теории гравитации Эйнштейна, уравнения общерелятивистской электродинамики записываются релятивистски инвариантным образом относительно ускоренных систем отсчета и применимы для любых ускорений. Они переходят в уравнения электродинамики Максвелла–Лоренца в приближении слабых полей и слаборелятивистских скоростей в соответствии с неравенством (48). Более того, решение ее уравнений позволили найти короткодействующие добавки к потенциалу Кулона и объяснить опыты Резерфорда, не прибегая к использованию феноменологических ядерных потенциалов [11].

10.1 Электродинамика сильных полей и ультрарелятивистских скоростей

Из анализа уравнений электродинамики мы установили, что в сильных электромагнитных полях и при ультрарелятивистских скоростях специальный принцип относительности, а, значит, релятивистская инвариантность уравнений, нарушается. С другой стороны, в слабых гравитационных полях и при не слишком больших скоростях общерелятивистские уравнения гравитационного поля переходят в уравнения, математическая запись которых аналогична уравнениям электродинамики Максвелла-Лоренца. Поэтому возникает естественный вопрос, а можно ли найти уравнения электромагнитного поля, подобные уравнениям общерелятивистской теории гравитации, но справедливые для сильных электромагнитных полей и ультрарелятивистских скоростей? Ответ на этот вопрос - да, но при этом необходимо существенно изменить уравнения электродинамики.

10.1.1 Общерелятивистские уравнения движения заряда

Прежде всего, мы введем в электродинамике *ускоренные локально инерциальные системы отсчета* связанные с зарядами. В общерелятивистской электродинамике такие системы отсчета подобны свободно падающим лифтам в теории гравитации Эйнштейна. Подобные системы отсчета, а, значит, и заряды движутся согласно уравнениям геодезических

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad (108)$$

параметрического риманова пространства с метрическим тензором

$$g_{ik} = \eta_{ik} + k a_{ik}, \quad (109)$$

где $k = e/m$ удельный заряд частицы с зарядом e и массой m и a_{ik} – тензорный потенциал электромагнитного поля [10]. Используя (109) и определение (54), находим

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} k g^{im} (a_{jm,k} + a_{km,j} - a_{jk,m}) = -\frac{e}{mc^2} E^i_{jk}, \quad (110)$$

где

$$E^i_{jk} = -\frac{c^2}{2} g^{im} (a_{jm,k} + a_{km,j} - a_{jk,m}) \quad (111)$$

- напряженность сильного гравитационного поля. Эта величина, также как и Γ^i_{jk} , имеет не тензорный закон преобразования относительно общерелятивистских преобразований координат

$$E^{k'}_{j'i'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} E^k_{ji}. \quad (112)$$

Физический смысл этого закона преобразования заключается в том, что в общерелятивистской электродинамике допускается переход в ускоренную локально инерциальную систему отсчета, в которой уравнения движения заряда

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{e}{mc^2} E^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \quad (113)$$

локально принимают вид уравнений свободного движения заряда

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = 0. \quad (114)$$

Конечно, если мы ограничимся линейными ортогональными преобразованиями координат, например, преобразованиями Лоренца, соответствующими переходу из одной инерциальной системы в другую, то величина E^i_{ik} будет вести себя как тензор.

Используя приближение слабого поля

$$\left| \frac{e}{m} \right| \| a_{ik} \| \ll 1 \quad (115)$$

и предполагая слабо релятивистские скорости, можно записать 3х-мерные уравнения движения заряда (113) в виде

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = \frac{e}{m} \left(E_{\alpha 00} + 2E_{\alpha\beta 0} \frac{1}{c} \frac{dx^\beta}{dt} \right),$$

где

$$E_{\alpha 00} = g_{\alpha 0,0} - \frac{1}{2} g_{00,\alpha} = A_{\alpha,0} - A_{0,\alpha}, \quad E_{\alpha\beta 0} = \frac{1}{2} (g_{\alpha 0,\beta} - g_{\beta 0,\alpha}) = A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha}.$$

Здесь мы ввели векторный потенциал электромагнитного поля с компонентами

$$A_0 = \frac{c^2}{2} a_{00}, \quad A_\alpha = a_{\alpha 0} c^2. \quad (116)$$

Уравнения движения заряда теперь можно записать как

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} &= \frac{e}{m} \left[(A_{\alpha,0} - A_{0,\alpha}) - (A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha}) \frac{dx^\beta}{cdt} \right] = \\ \frac{e}{m} \left[(A_{\alpha,0} - A_{0,\alpha}) \frac{dx^0}{cdt} - (A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha}) \frac{dx^\beta}{cdt} \right] &= \frac{e}{m} (A_{k,\alpha} - A_{\alpha,k}) \frac{dx^k}{cdt} \end{aligned} \quad (117)$$

или

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = \frac{e}{m} F^{\alpha k} \frac{dx_k}{cdt}, \quad (118)$$

где

$$F_{ik} = A_{k,i} - A_{i,k}. \quad (119)$$

Таким образом, из уравнений геодезических (108) в параметрической римановой геометрии с метрическим тензором (109) в приближении слабых полей и слабо релятивистских скоростей мы получили силу Лоренца (118) электродинамики Максвелла-Лоренца, при этом напряженности электрического и магнитного поля вычисляются с помощью тензора электромагнитного поля (119).

Несмотря на то, что уравнения (118) подобны уравнениям движения (42) электродинамики Максвелла-Лоренца, между этими уравнениями существуют принципиальные различия. Действительно, если мы потребуем, чтобы пространство событий геометризованной электродинамики стало пространством Минковского (потенциал $a_{ik} = 0$), то векторный потенциал (116) и электромагнитные поля (119) в уравнениях движения (118) обращаются в нуль. Такого нет в обычной электродинамике Максвелла-Лоренца. Далее, в сильных электромагнитных полях и при ультрарелятивистских скоростях уравнения движения (118) должны быть заменены уравнениями (108), при этом существенную роль начинают играть тензорные компоненты потенциала a_{ik} .

10.1.2 Уравнения сильных электромагнитных полей

Вычисляя с помощью (110) тензор римановой кривизны пространства геометризованной электродинамики, находим

$$R^i{}_{jkm} = -\frac{2e}{mc^2} E^i{}_{j[m,k]} + \frac{2e^2}{m^2 c^4} E^i{}_{s[k} E^s{}_{|j|m]}. \quad (120)$$

Образуя тензор Риччи и используя условие слабости электромагнитного поля (115), находим

$$R_{ik} = -\frac{e}{2m} \left(\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x^\alpha \partial x_\alpha} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial t^2} \right). \quad (121)$$

$$\alpha, \beta \dots = 1, 2, 3, \quad i, k \dots = 0, 1, 2, 3.$$

Если мы теперь запишем для (121) уравнения, подобные вакуумным уравнениям Эйнштейна $R_{ik} = 0$, то для векторного потенциала электромагнитного поля (116), получим уравнения поля вне заряженной материи

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A^i = 0. \quad (122)$$

Введем тензор энергии-импульса заряженной материи в следующем виде

$$T_{ik}^{(e)} = \rho^{(e)} c^2 u_i u_k,$$

где $\rho^{(e)}$ – плотность заряженной материи, $u_i = dx_i/ds$, $u_i u^i = 1$ – единичный вектор 4-х скорости. Для точечного заряда плотность $\rho^{(e)}$ представлена как

$$\rho^{(e)} = e \delta(\mathbf{r}),$$

где $\delta(\mathbf{r})$ – дельта функция Дирака. Запишем уравнения для сильного электромагнитного поля в виде

$$R_{ik} = \kappa^{(e)} \left(T_{ik}^{(e)} - \frac{1}{2} g_{ik} T^{(e)} \right) \quad (123)$$

где множитель $\kappa^{(e)}$ задан как

$$\kappa^{(e)} = \begin{pmatrix} \kappa_{(00)}^{(e)} \\ \kappa_{(\alpha 0)}^{(e)} \\ \kappa_{(\alpha \beta)}^{(e)} \end{pmatrix}. \quad (124)$$

или

$$R_{00} = \kappa_{(00)}^{(e)} \left(T_{00}^{(e)} - \frac{1}{2} g_{00} T^{(e)} \right), \quad (125)$$

$$R_{\alpha 0} = \kappa_{(\alpha 0)}^{(e)} \left(T_{\alpha 0}^{(e)} - \frac{1}{2} g_{\alpha 0} T^{(e)} \right), \quad (126)$$

$$R_{\alpha \beta} = \kappa_{(\alpha \beta)}^{(e)} \left(T_{\alpha \beta}^{(e)} - \frac{1}{2} g_{\alpha \beta} T^{(e)} \right). \quad (127)$$

Требую соответствия уравнений (125) и (126) в приближении слабых полей и слабо релятивистских скоростей уравнениям Максвелла, находим

$$\kappa_{00}^{(e)} = \frac{8\pi e}{mc^4}, \quad \kappa_{\alpha 0}^{(e)} = \frac{2\pi e}{mc^4}. \quad (128)$$

С учетом (121), уравнения (125) и (126) могут быть объединены в 4-х мерные уравнения

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A^i = -\frac{4\pi}{c} j^i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (129)$$

где 4-х вектор тока j^i имеет следующие компоненты

$$j^i = (\rho^{(e)}c, \rho^{(e)}cu_\alpha), \quad (130)$$

а потенциал A^i определяется согласно (116).

11 Теоретические следствия общерелятивистской электродинамики

Прежде всего отметим, что вакуумные уравнения геометризированной электродинамики $R_{ik} = 0$ совпадают с вакуумными уравнениями Эйнштейна. Сферически-симметричное решение этих уравнений, описывающее поле создаваемое потенциалом кулон-ньютоновского типа, имеет (в квазидекартовых координатах) вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)c^2dt^2 - \left(1 + \frac{r_0}{r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (131)$$

где r_0 – константа интегрирования. Если поле создается массой M , тогда $r_0 = r_g = 2MG/c^2$ и из (131) мы получаем гравитационную метрику Шварцшильда (63). В случае, когда поле создается зарядом Ze , в котором движется пробный заряд $-e$ с массой m (заряды имеют разные знаки), то, как это следует из принципа соответствия [8]

$$r_0 = r_e = \frac{2Ze^2}{mc^2} \quad (132)$$

и метрика (131) запишется как

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Ze^2}{mc^2r}\right)c^2dt^2 - \left(1 + \frac{2Ze^2}{mc^2r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (133)$$

Если в этом же поле движется пробный заряд e с массой m (заряды имеют одинаковые знаки), то метрика (131) принимает вид

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2Ze^2}{mc^2r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2Ze^2}{mc^2r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (134)$$

Проблема объединения гравитационных и электромагнитных взаимодействий теперь выглядит следующим образом. Мы представляем объединенную гравиелектромагнитную метрику в виде

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \gamma_{ik} + ka_{ik}.$$

Используя принцип соответствия решения вакуумных уравнений (131) с уравнениями Пуассона и Кулона, находим объединенную гравиелектромагнитную метрику в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g + r_e}{r}\right)c^2dt^2 - \left(1 + \frac{r_g + r_e}{r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (135)$$

При взаимодействии элементарных частиц обычно выполняется условие $r_g \ll r_e$, в то время как для планет $r_g \gg r_e$. При описании электромагнитного взаимодействия электрона и позитрона, имеем

$$r_e = \frac{2e^2}{mc^2} \simeq 5,8 \times 10^{-13} \text{ см.}$$

11.1 Новые потенциалы взаимодействия в электродинамике

В современной физике существует всего лишь две фундаментальных теории, решение уравнений которых приводят к фундаментальному потенциалу кулон-ньютоновского типа

$$\varphi \sim \frac{\alpha}{r}$$

– это электродинамика Максвелла-Лоренца и гравитодинамика Ньютона-Эйнштейна. Поиск новых фундаментальных потенциалов взаимодействия является стратегической задачей теоретической физики, поскольку большинство физических теорий используют феноменологические потенциалы, написанные руками. В электродинамике эта проблема стоит наиболее остро из-за того, что вначале Э.Резерфорд [6], а затем Р.Хофштадтер [7] обнаружили отклонение от кулоновского рассеяния как раз в области сильных электромагнитных полей и при ультрарелятивистских скоростях.

Любое точное решение вакуумных уравнений $R_{ik} = 0$ геометризованной электродинамики приводит к метрике Римана, в которую входит метрический тензор пространства g_{ik} . Используя эту метрику, запишем действие S в виде

$$S = -mc \int ds = -mc \int \left(g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right)^{1/2} dt = \int L dt, \quad (136)$$

где

$$L = -mc \left(g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right)^{1/2} = T - U \quad (137)$$

– лагранжиан системы. Если поле на бесконечности исчезает, то потенциальная энергия взаимодействия между частицей и источником поля обращается в нуль $U_\infty = 0$. Следовательно, на бесконечности имеем

$$L_\infty = -mc \left(\eta_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right)^{1/2} = T, \quad (138)$$

где η_{ik} – метрический тензор пространства Минковского. Из соотношений (137) и (138) имеем для потенциальной энергии выражение

$$U = T - L = -mc \left[\left(\eta_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right)^{1/2} - \left(g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right)^{1/2} \right]. \quad (139)$$

Для качественного исследования потенциальной энергии, полученной из решения вакуумных уравнений $R_{ik} = 0$ удобно пользоваться приближенной нерелятивистской формулой, которую можно получить из соотношения

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2},$$

где g_{00} является 00-компонентой метрического тензора g_{ik} . Полагая в этом соотношении $U = m\varphi$, находим

$$U = \frac{mc^2}{2} (g_{00} - 1). \quad (140)$$

Как правило, эта простая формула позволяет определить основную тенденцию исследуемого взаимодействия.

11.1.1 Обобщения кулоновского потенциала

В книге [8] приведены некоторые точные решения вакуумных уравнений $R_{ik} = 0$ геометризированной электродинамики, обобщающие кулоновскую потенциальную энергию. Здесь мы представим ряд потенциальных энергий, найденных из решения уравнений $R_{ik} = 0$, а именно:

1) с короткодействующим "ядерным" взаимодействием и потенциальной энергией вида

$$U = -mc^2 \frac{r_N^2}{r^2 + r_N^2}, \quad r_N = \text{const}; \quad (141)$$

2) с "электроядерным" взаимодействием и потенциальной энергией вида

$$U = -\frac{mc^2}{2} \frac{rr_e + 2r_N^2}{r^2 + r_N^2}, \quad r_N = \text{const}, \\ r_e = \text{const}; \quad (142)$$

3) с кулоновским взаимодействием, трехмерным вращением источника и потенциальной энергией вида

$$U = -\frac{mc^2}{2} \frac{r_e r}{r^2 + r_s^2 \cos^2 \theta}, \quad r_e = \text{const}, \\ r_s = \text{const}; \quad (143)$$

4) с "электроядерным" взаимодействием, трехмерным вращением источника и потенциальной энергией вида

$$U = \frac{mc^2}{2} \left(\frac{r^2 - r_e r - r_N^2 + r_s^2 \cos^2 \theta}{r^2 + (r_N - r_s \cos \theta)^2} - 1 \right). \quad (144)$$

11.2 Стационарные траектории в геометризированной электродинамике

При изучении атомных спектров различных элементов были обнаружены стационарные состояния квантовых систем и первые попытки создать квантовую теорию атома вынудили Н. Бора ввести принцип стационарности электронных орбит в атоме. Согласно этому принципу, электрон, двигаясь ускоренно в кулоновском поле ядра, не излучает электромагнитных волн.

Покажем, что в геометризированной электродинамике принцип стационарности траекторий есть следствие геодезического движения зарядов в искривленном пространстве.

Действительно, из уравнений движения (108) в центрально-симметричном электромагнитном поле, описываемом метрикой (133), следуют два интеграла движения:

$$E = mc^2 \left(1 - 2Ze^2/rmc^2 \right) \frac{dx^0}{ds} = \text{const}, \quad (145)$$

$$L = mr^2 \frac{d\varphi}{ds} = \text{const}, \quad (146)$$

где E – полная энергия пробной частицы массы m и заряда $-e$, движущейся в центрально-симметричном поле заряда Ze с массой $M \gg m$, а L – орбитальный момент пробной частицы.

Соотношения (145) и (146) показывают, что хотя заряд $-e$ и движется ускоренно согласно уравнениям геодезических (108), его момент и энергия сохраняются, причем в каждой точке траектории. При таком движении ускоренная система отсчета, связанная с самим зарядом, является локально инерциальной с локальными уравнениями движения вида $d^2x^i/ds^2 = 0$. Эти уравнения показывают, что заряд движется локально прямолинейно и равномерно (или покоится), и, следовательно, не излучает. Такое состояние заряда имеет место вдоль всей криволинейной траектории, поэтому мы вправе утверждать, что *заряд не излучает вдоль всей криволинейной траектории*. Теперь при построении квантовой модели атома нам не надо вводить постулат Н. Бора о существовании безызлучательных траекторий у электрона, движущегося в центральном поле ядра. Этот принцип, как было показано выше, уже заложен в уравнениях геометризированной электродинамики. Поскольку в основе геометризированной электродинамики лежит принцип общей относительности, то мы можем утверждать, что принцип стационарных состояний квантовой теории есть следствие общего принципа относительности.

12 Экспериментальные следствия общерелятивистской электродинамики

Экспериментально ядерные силы были обнаружены на расстояниях порядка 10^{-12} см от центра ядра, где как раз и проявляют себя сильные электромагнитные поля. Основные свойства ядерных сил это:

- 1) короткодействующий характер взаимодействия;
- 2) зарядовая независимость;
- 3) сильная зависимость от спина.

Для описания ядерных взаимодействий на основе точных решений вакуумных уравнений $R_{ik} = 0$ геометризированной электродинамики, А.Н.Сидоров и Е.А.Губарев [18, 19] предложили использовать статическое решение вакуумных уравнений с потенциальной энергией (142). Эта энергия может быть представлена в виде двух слагаемых, где первый член убывает с расстоянием как $1/r$, а второй как $1/r^2$. Заметим, что короткодействующий член существует при $r_e = 0$, когда чисто электромагнитное взаимодействие отсутствует. По аналогии с гравитационным r_g и электромагнитным r_e , величину r_N было предложено называть ядерным радиусом.

12.1 Классическая задача рассеяния частиц на ядрах

Рассмотрим задачу упругого рассеяния заряженной частицы на центре, взаимодействие с которым описывается потенциальной энергией (142). Пусть в поле заряда Ze с массой $M \gg m$ происходит упругое рассеяние заряда $\pm ze$ с массой m , тогда r_e этого

процесса определяется формулой

$$r_e = \pm \frac{2Zze^2}{mc^2}.$$

Явный вид этой формулы был найден на основе принципа соответствия геометризированной электродинамики уравнениям электродинамики Максвелла–Лоренца.

Из структуры потенциальной энергии (142) видно, что эта энергия отлична от нуля даже при $r_e = 0$. Следовательно, потенциальная энергия (142) обладает двумя основными свойствами ядерной потенциальной энергии, наблюдаемыми в опытах, – короткодействием и зарядовой независимостью.

Для окончательного решения вопроса о возможности использовать решение с потенциальной энергией вида (142) для описания электроядерного взаимодействия А.Н.Сидоровым и Е.А.Губаревым было проведено сравнение теоретических расчетов по упругому рассеянию нейтронов и протонов на ядрах различных элементов. Были проведены расчеты как классического, так и квантового рассеяния незаряженных частиц в римановой метрике этого решения.

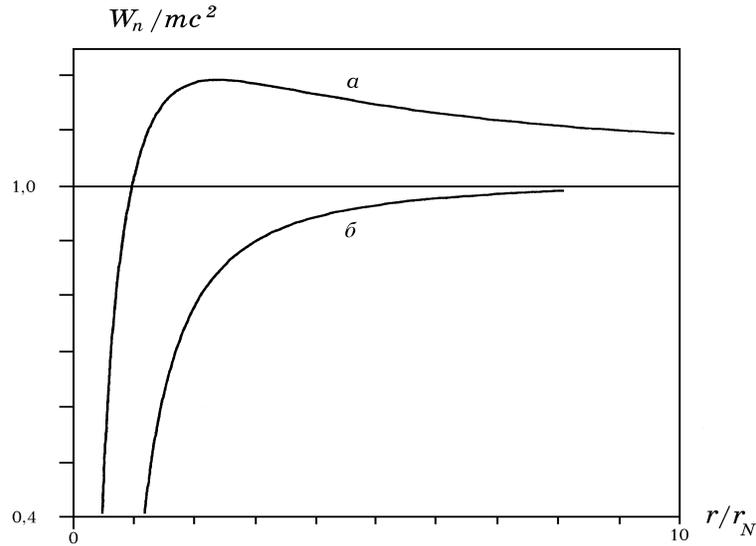


Рис. 1: Относительная энергия $W_n(r)/mc^2$ для протонов (а) и нейтронов (б)

Эффективный потенциал взаимодействия следует из уравнений движения рассеиваемой частицы, записанных в виде уравнений Гамильтона–Якоби

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 c^2 = 0. \quad (147)$$

Радиальная часть уравнений (147) при движении классической частицы в римановой метрике имеет следующий вид

$$m^2 c^2 (dr/ds)^2 = M^2 \frac{U}{(r^2 + r_N^2)} + m^2 c^2 U + \frac{E^2}{c^2}, \quad (148)$$

где $M^2 = b^2(\gamma^2 - 1)m^2 c^2$ – квадрат момента импульса частицы, b – прицельное расстояние, $\gamma = E/mc^2$, E – полная энергия. Потенциальная энергия частицы $W_n(r)$ при

условии, что $E \geq W_n(r)$, определяется из соотношения (148)

$$W_n(r) = mc^2 \left\{ \left(1 - \frac{rr_e + 2r_N^2}{r^2 + r_N^2} \right) \left[1 + \frac{M^2}{m^2 c^2 (r^2 + r_N^2)} \right] \right\}^{1/2}. \quad (149)$$

Полагая в этом соотношении $M = 0$, получим потенциальную энергию электроядерного взаимодействия. На рис. 1 представлен график зависимости отношения $W_n(r)/mc^2$ от r/r_N для двух случаев:

- а) $G = r_e/r_N = -2$ (электроядерное взаимодействие, одноименные заряды);
- б) $G = r_e/r_N = 0$ (чисто ядерное взаимодействие).

Кривая *a* ведет себя как кулон-ядерная потенциальная энергия, используемая в ядерной физике. Из графика видно, что за кулоновским барьером начинается область действия ядерных сил. С другой стороны, кривая *б* описывает чисто ядерную потенциальную энергию, порождаемую ядерным потенциалом типа Вудса–Саксона.

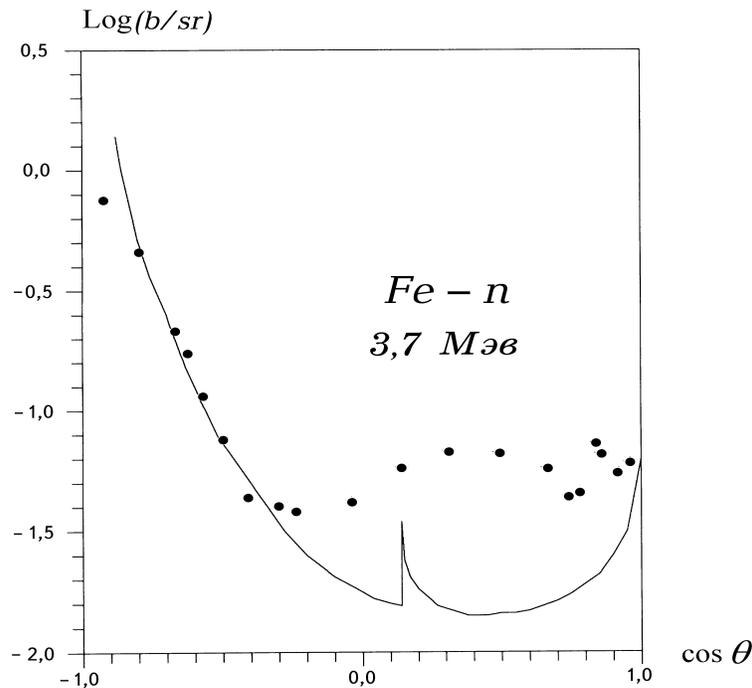


Рис. 2: Классическое рассеяние нерелятивистских нейтронов с энергией 3,7 Мэв на ядрах железа

Исследование классического рассеяния частиц, движущихся согласно уравнениям (147) [18], дало более точную информацию о потенциальной энергии (142).

Сравнивая теоретическую кривую дифференциального сечения рассеяния на малые углы, вычисленную для незаряженных частиц, с экспериментальными данными по рассеянию нейтронов на ядрах различных элементов, можно определить величину ядерного радиуса r_N . Оказалось, что $r_N = 5,6 \times 10^{-15}$ см.

На рис. 2 представлены экспериментальные точки дифференциального сечения рассеяния нейтронов с кинетической энергией 3,7 Мэв на ядрах железа и теоретическая кривая с $r_e = 0, r_N = 5,6 \times 10^{-15}$ см.

Острый пик на кривой объясняется сечением рассеяния частиц, совершивших более одного оборота вокруг рассеиваемого центра.

Из полученного значения ядерного радиуса r_N , определяющего «горизонт событий» при $r_e = 0$, радиус действия ядерных сил $r_Я$ можно оценить как

$$r_Я \sim (10 - 20)r_N \sim 10^{-13} \text{ см}, \quad (150)$$

что соответствует общепринятым оценкам.

На рис.2 видно, что теоретическое значение упругого сечения рассеяния классических частиц совпадает с экспериментальным сечением только на малых углах рассеяния, для которых классическое и квантовое описания рассеяния дают одинаковые результаты.

12.2 Квантовая задача рассеяния частиц на ядрах

Для описания рассеяния на большие углы была построена квантовая теория рассеяния частиц [18, 19]. Путем разделения переменных для волновой функции

$$\psi(t, r, \theta, \varphi) = \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) \frac{\chi_l(r)}{\sqrt{r^2 + r_N^2}} P_{lm}(\theta) \exp(im\varphi), \quad (151)$$

в уравнении Клейна–Гордона

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi = 0 \quad (152)$$

на фоне метрики

$$ds^2 = -\Phi [cdt + 4r_N \sin^2(\theta/2) d\varphi]^2 + \frac{dr^2}{\Phi} - (r^2 + r_N^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi), \quad (153)$$

$$\Phi = -1 + \frac{rr_e + 2r_N^2}{r^2 + r_N^2},$$

где l, m – азимутальное и магнитное квантовые числа, получены уравнения для радиальной $\chi_l(r)$ и угловой $P_{lm}(\theta)$ функций. После определения псевдосферических гармоник $P_{lm}(\theta)$ и точного разложения по ним плоской волны $\exp(ikr \cos \theta)$ выведена формула для амплитуды рассеяния

$$f(\theta) = \frac{1}{2^{1+C} ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 2C + 1) \left(\frac{E_l^0}{B_l} - 1 \right) P_{l0}(\theta), \quad (154)$$

где $C = 2\gamma\delta$, $\delta = r_N mc/\hbar$.

В соотношении (154), помимо коэффициентов разложения E_l^0 плоской волны по псевдосферическим гармоникам, вошли значения фазовой функции на бесконечности B_l . Вычисление B_l проводилось путем численного решения фазового уравнения.

Из сравнения квантового сечения рассеяния не заряженных частиц с экспериментальными данными были определены значения r_N для различных элементов [18]. Было установлено, что соблюдается эмпирический закон ядерной физики

$$r_N \sim A^{1/3}, \quad (155)$$

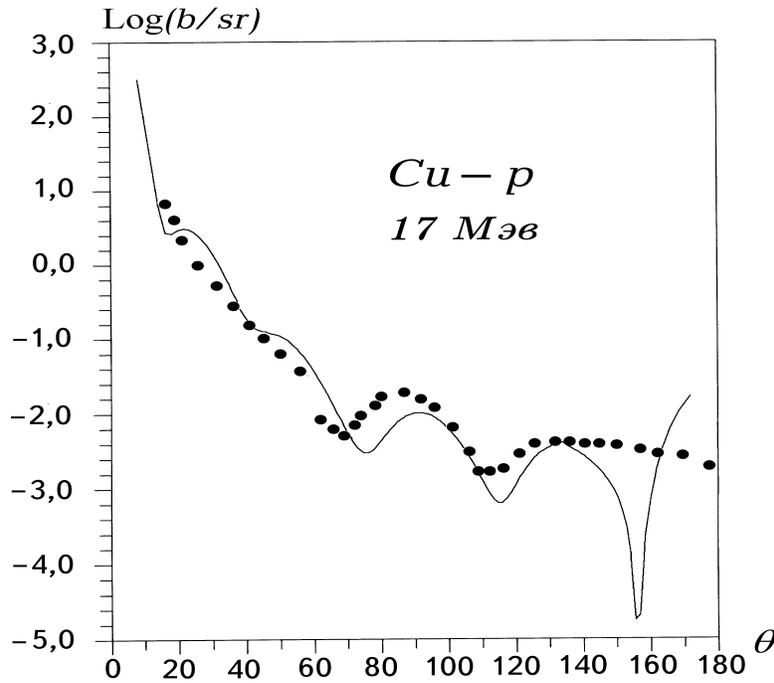


Рис. 3: Упругое рассеяние протонов с энергией 17 Мэв на ядрах меди

где A – массовое число ядра, при этом ядерный радиус r_N не зависит от энергии рассеиваемых частиц.

Определенное из решения квантовой задачи значение r_N (уточненное после выхода работы [18]) было использовано затем в задаче по расчету сечения рассеяния квантовой частицы, взаимодействующей с источником поля электроядерным образом ($r_e \neq 0$, $r_N \neq 0$). Значения r_e определялись из формулы для электромагнитного радиуса, которая для рассеиваемых протонов принимает вид

$$r_e = -2Z\alpha \frac{\hbar}{m_p c}, \quad (156)$$

где α – параметр тонкой структуры; Z – зарядовое число ядра.

На рис. 3 теоретическая кривая представляет собой дифференциальное сечение рассеяния заряженной квантовой частицы с энергией покоя 938,5 Мэв, кинетической энергией 17 Мэв. Параметр $\delta = r_N mc/\hbar = 0,15$, что соответствует $r_N = 3,15 \times 10^{-15}$ см, параметр $G = r_e/r_N = -2,8$, что соответствует $|r_e| = 8,9 \times 10^{-15}$ см. Экспериментальные точки – дифференциальное сечение упругого рассеяния протонов энергии 17 Мэв на ядрах меди.

Таким образом, исследования показали хорошее соответствие экспериментальных и теоретических данных в квантовой картине рассеяния частиц, обладающих ядерным взаимодействием. Кроме того, теория позволяет обосновать наблюдаемую на опыте зависимость (155). Это дает нам право утверждать, что потенциальная энергия (142), полученная из решения вакуумных уравнений $R_{ik} = 0$ геометризированной электродинамики, описывает ядерные и электроядерные взаимодействия.

12.3 Зависимость ядерного взаимодействия от спина

Еще более перспективным для описания ядерных взаимодействий представляется решение с потенциальной энергией взаимодействия (144). Это решение содержит дополнительную константу интегрирования r_s , интерпретируемую как параметр, ответственный за трехмерное вращение источника (вращательный радиус). Такие фундаментальные свойства ядерных взаимодействий, как зависимость от спина и тензорный характер взаимодействия, описываются (пока качественно) потенциальной энергией (144). На рис. 4 показаны графики зависимости потенциальной энергии (144) от r_s и от направления трехмерного спина источника поля.

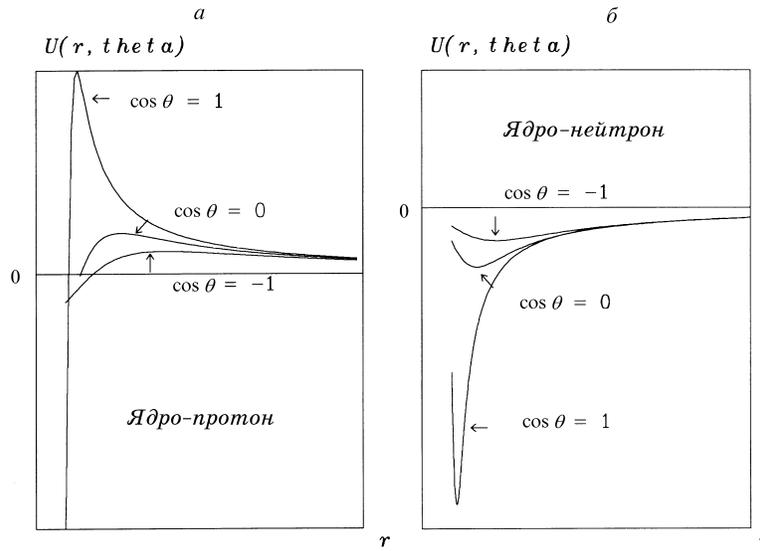


Рис. 4: Графики зависимости потенциальной энергии от спина a – потенциальная энергия рассеяния протонов на поляризованной мишени при $r_e/r_N = -2, r_N/r_s = 1, 5$; b – то же, для нейтронов при $r_e/r_N = 0, r_N/r_s = 1, 5$

Потенциальная энергия (144) предоставляет широкие возможности для фундаментального описания взаимодействий в области микромира и позволяет предположить, что некоторые экспериментальные эффекты, кажущиеся аномальными даже для общепринятых феноменологических теорий, могут быть проинтерпретированы в рамках теории физического вакуума [8]. Например, это – опыты А. Криша [20], показывающие значительную левую и правую асимметрии в рассеянии протонного пучка высокой энергии на поляризованной протонной мишени. В рамках вакуумной модели эффект Криша может быть объяснен на основе решения с римановой метрикой типа Керра–НУТ [21] с тремя независимыми параметрами r_e, r_N , а также с параметром Керра $a = r_s$. Наличие у источника поля параметра Керра $r_s \neq 0$ создает так называемый эффект увлечения частиц, который и выражается в лево-правой асимметрии сечения рассеяния как нерелятивистских, так и ультрарелятивистских частиц.

Заключение

Исследования, проводимые в современной ядерной физике, требуют огромных интеллектуальных и материальных затрат. Достаточно напомнить, что уже полвека ведутся безуспешные работы по управляемой термоядерной реакции, при этом физики используют феноменологическую теорию ядерных сил, в которой ядерные потенциалы пишутся руками. Любой здравомыслящий ученый понимает, что управлять природными явлениями, фундаментальные (а не описательные) законы которых нам не известны, не приведет к успеху. Более того, при таком скудном теоретическом оснащении эксперименты в области ядерной физики чреваты непредсказуемыми последствиями.

Решение первой проблемы Эйнштейна по геометризации уравнений электродинамики дает нам возможность описать ядерные взаимодействия фундаментальным образом и получать теоретические предсказания в области ядерных явлений с большой точностью. Результаты исследований, полученные в работах [18],[19],[11] и [8] убеждают нас в этом.

Список литературы

- [1] *Лармор Дж.* Эфир и материя, Кембридж, 1900 г.
- [2] *Дирак П.А.М* В кн. Пути физики, М.: ЭнергATOMиздат, 1983, 62.
- [3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1973.
- [4] *Einstein A.* // Ann. Phys. 1905. Vol. 17. P.891.
- [5] *Паули В.* Теория относительности. М.;Л.: Гостехтеориздат, 1947, с. 149.
- [6] *Rutherford E.* // Philos. Mag. 1919. Vol. 37. P.537.
- [7] *Hofstadter R.* // Rev. Mod. Phys. 1956. Vol. 28, №3. P.814.
- [8] *Шипов Г.И.* Теория физического вакуума, теория, эксперименты, технологии М.: Наука, 1997, с.450.
- [9] *Пуанкаре А.* В сб. статей: Принцип относительности. М.: Атомиздат, 1973, сс. 90-97.
- [10] *Шипов Г.И.* // Изв. вузов. Физика. 1972. №10. С. 98–104.
- [11] *Губарев Е.А., Сидоров А.Н., Шипов Г.И.* // Тр. V семинара «Гравитационная энергия и гравитационные волны». ОИЯИ, Дубна. 1993. С. 232–238.
- [12] *Einstein A., Grossmann M.* Z.Math und Phys., 1913, v. 62, 225-261.
- [13] *Einstein A.* Phys.Z., 1913, v. 14, 1249-1262.
- [14] *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. Изд. 2-е, М., Физматгиз, 1961.
- [15] *Einstein A.* Sitzungsber. preuss. Akad.Wiss., 1915, v. 48, 2, 844-847.

- [16] *Einstein A.* Sitzungsber. preuss. Akad.Wiss., 1915, v. 47, 2, 831-839.
- [17] *Einstein A.* Ann.Phys., 1916, v. 49, 769-822.
- [18] *Губарев Е.А., Сидоров А.Н.* // Тез. докл. XXVIII науч. конф. фак. физ.-мат. и естеств. наук Ун-та дружбы народов. М., 1992. Доп. вып. С. 3.
- [19] *Губарев Е.А., Сидоров А.Н.* // Тез. докл. VIII Рос. гравитац. конф. «Теоретические и экспериментальные проблемы гравитации». М.: Рос. гравитац. ассоц., 1993. С. 251.
- [20] *Криш А.Д.* // В мире науки. 1987. №10. С.12.
- [21] *Фролов В.П.* // ТМФ. 1974. Т.21, №2. С.213–223.