НАРУШЕНИЕ ПЕРВОГО ЗАКОНА МЕХАНИКИ НЬЮТОНА ПРИ ДВИЖЕНИИ СВОБОДНОГО 3D ГИРОСКОПА

Сидоров А.Н., Шипов Г.И.

Запишем уравнения Эйлера, описывающие вращение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной точки, в ускоренной системе отсчета, жестко связанной с твердым телом

$$\frac{d'\vec{P}}{dt}+[\vec{\omega}\,\vec{P}]=\vec{F} \ , \tag{1}$$

$$\frac{d'\vec{L}}{dt}+[\vec{\omega}\vec{L}]=\vec{N}. \tag{2}$$

Общее решение системы уравнений (1), (2) для скорости центра масс свободного ($\vec{F}=0,\ \ \vec{N}=0$) симметричного гироскопа с частотой вращения ω_0 и угловой частотой нутации Ω найдем в виде

$$\vec{V}(t)=C_1\vec{v}_1(t)+C_2\vec{v}_2(t)+C_3\vec{v}_3(t), \tag{3}$$

где

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix} A_0\cos\Omega t \\ A_0\sin\Omega t \\ R_0+2 \end{pmatrix},\quad \vec{v}_2=\begin{pmatrix} A_1 e^{i(\Omega-\beta)t}+B_1 e^{-i(\Omega+\beta)t} \\ -iA_2 e^{i(\Omega-\beta)t}+iB_1 e^{-i(\Omega+\beta)t} \\ (R_1+R_2+1)e^{-i\beta t} \end{pmatrix},\ \vec{v}_3=\begin{pmatrix} A_2 e^{i(\Omega+\beta)t}+B_2 e^{-i(\Omega-\beta)t} \\ -iA_2 e^{i(\Omega+\beta)t}+iB_2 e^{-i(\Omega-\beta)t} \\ (R_3+R_4+1)e^{i\beta t} \end{pmatrix},$$

$\Omega=\omega_0(I_3-I_1)/I_1$ - угловая частота нутации, I_3, $I_1=I_2$ - главные моменты инерции

$$\beta=\sqrt{C^2+(\Omega+\omega_0)^2=const}\ ,\ \ C=\sqrt{C\sin^2\Omega t+C\cos^2\Omega t}=const\ ,$$

$$A_0=\frac{C^2R_0-2\omega_0^2}{C\omega_0},\quad A_1=\frac{CR_1}{2\omega_0}+\frac{\alpha(1-R_2)-\omega_0(1+R_2)}{2C}\ ,$$

$$A_2=\frac{CR_3}{2\omega_0}+\frac{\alpha(1-R_4)-\omega_0(1+R_4)}{2C}\,,$$

$$R_1=\frac{2\omega_0^2}{C^2}+\frac{2\omega_0(\sqrt{C^2\Omega^2+(\Omega\omega_0+\alpha^2)^2}-\alpha^2)}{C^2\Omega}\ ,$$

$$R_2 = -\frac{2(\alpha^2+\Omega\omega_0)(\alpha^2+\Omega\omega_0+\sqrt{C^2\Omega^2+(\Omega\omega_0+\alpha^2)^2})}{C^2\Omega^2} - 1 \ ,$$

$$R_3 = \frac{2\omega_0^2}{C^2} - \frac{2\omega_0(\sqrt{C^2\Omega^2+(\Omega\omega_0+\alpha^2)^2}-\alpha^2)}{C^2\Omega} \ ,$$

$$R_4 = -\frac{2(\alpha^2+\Omega\omega_0)(\alpha^2+\Omega\omega_0-\sqrt{C^2\Omega^2+(\Omega\omega_0+\alpha^2)^2})}{C^2\Omega^2} - 1 \ ,$$

$$\alpha = \sqrt{C^2+\omega_0^2} \ .$$

Константы C_1, C_2, C_3 в соотношении(3) определяются из начальных условий и удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} A_0 & \frac{C}{\omega_0}R_1 - \frac{\omega_0}{C}(R_2+1) & \frac{C}{\omega_0}R_3 - \frac{\omega_0}{C}(R_4+1) \\ 0 & \frac{i\alpha}{C}(R_2-1) & \frac{i\alpha}{C}(R_4-1) \\ R_0+2 & R_1+R_2+1 & R_3+R_4+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1(0) \\ V_2(0) \\ V_3(0) \end{pmatrix} . \qquad (4)$$

Рассмотрим случай : C=8, Ω=5, ω_0=100 и выберем начальные условия в виде

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} x0 \\ y0 \\ z0 \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad \vec{V}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Результаты расчетов при этих начальных условиях представлены на рис.1 и 2.

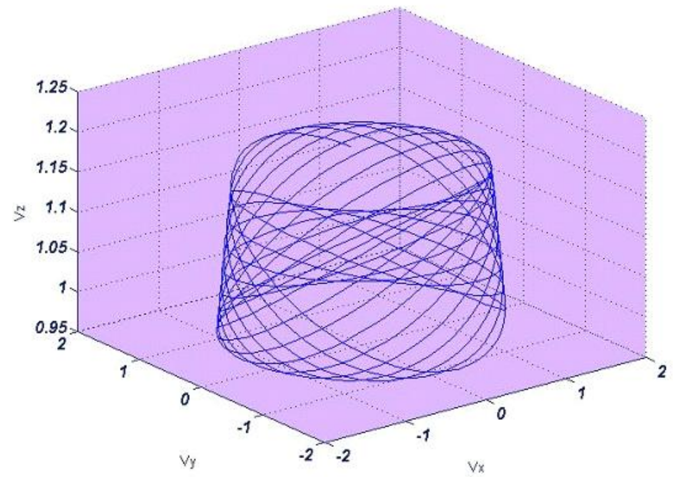

Рис.1 Изменение скорости центра масс свободного гироскопа при его нутации

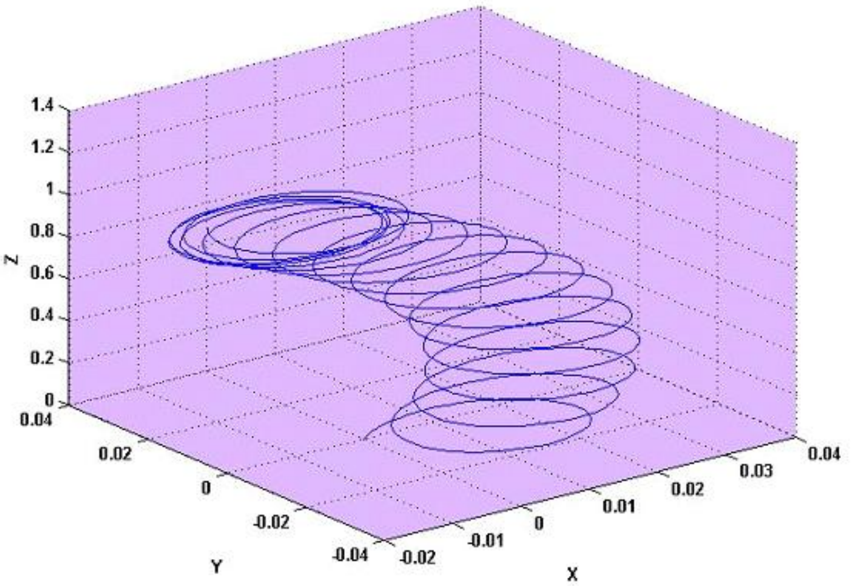

Рис.2 Изменение координат центра масс свободного гироскопа при его нутации

В этом примере константы C1=0.000162007609770, C2=0.000000131643299 + 0.000000142913486i, C3= - 0.036728116995517 + 0.039872468227959i. Все вычисления были выполнены в программе Matlab.

Из графиков 1 и 2 видно, что центр масс гироскопа, свободного от внешних сил и моментов, движется ускоренно. Этот факт показывает нам, что, в общем случае, движение центра масс свободного от внешнего воздействия гироскопа не подчиняется первому закону механики Ньютона.

19.12.2011